Math. p. 358-2

Ex Bibliotheca ecclesiæ
Collegiatæ Lateranensis ad
S. Nicolaum prope Passavium.

<366279697800l8

<366279697800l8

Bayer. Staatsbibliothek

Math. 338-2.

Mayer

Mathesis. Geometria applica

443

Math. a. 162

Gründlicher
und
ausführlicher Unterricht
zur
praktischen
Geometrie.

von

M. Johann Tobias Mayer.

Zweyter Theil,
mit 6 Kupfertafeln.

Göttingen,
Verlegts der Wittwe Vandenhoek. 1770

Bayerische
Staatsbibliothek
München

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Vorerrinnerung.

ß ich den zweiten Theil meiner practi-
schen Geometrie, mit den Untersu-
en über die Fehler beym Winkels-
anfange, hierauf zur Prüfung der
euge fortgehe, und noch einige Vor-
ngen beschreibe, wodurch Werkzeuge
Winkelmessen einen höhern Grad
Vollkommenheit erlangen können,
elt ich für nützlicher, als sogleich vom
elmessen zur Entwerfung der Figuren
m Felde fortzugehen; denn eben die
e Ausübung des letztern hängt von
Kenntnissen ab, und ein Feldmesser,
ders so viel Theorie verstehet, als
Verstande der erstern Kapitel dieses
n Theils erfordert werden, wird mir
sicher Beyfall geben. Aber solte sich
mancher Feldmesser, wegen einiger
stabenrechnungen die ihm in die Au-
llen werden, abschrecken lassen, sich
nhalt davon bekant zu machen? Ich
e nicht; er müste denn gar zu unwis-
seyn, und nicht einmahl die vor-
ten Lehren der Elementargeometrie

und Trigonometrie verstehen. — Hat er aber die Lehre von den Kugelschnitten, und Lage der Ebenen gegeneinander, sich wohl bekant gemacht, so wird er gewiß wenig Schwürigkeit finden, den Inhalt des Xten und XIten Kapitels zu verstehen, weil ich in der Auseinandersetzung der darin vorkommenden sphärischen Dreyecke, so umständlich verfahren bin, als es mir für Anfänger nöthig schien, und wenn man die in den trigonometrischen Lehnsätzen beygebrachten Formeln für die Auflösung der sphärischen Dreyecke, auch ohne Beweis, nur als Vorschriften ansiehet, nach denen man rechnen kan, so bald man verstehet was ihr Ausdruck in Buchstaben, für eine Bedeutung hat, so wird die Anwendung dieser Vorschriften keine Schwürigkeit verursachen; die Bedeutung der erwähnten Formeln läst sich aber gar leicht ins Deutsche übersetzen, wenn man nur weiß, daß z. E. Ausdrücke von der Art

$$\sin A + \sin B;\quad \sin A - \sin B;\quad \sin A \sin B;\quad \frac{\sin A}{\sin B}$$

u. s. w. Summen, Unterschiede, Producte oder Quotienten von ein paar Sinussen bedeuten. Und daher überlasse ich es i

Anfänger, die Ausdrückungen durch
ßstaben, die in oberwähnten Formeln
ommen, selbst in Worte zu übersetzen;
diese Errinnerung gilt für das XVII
tel, dessen Inhalt einem Feldmesser
gewiß sehr nöthig ist, aber ohne Aus-
ungen durch Buchstaben, unendlich
üstig und ermüdend seyn würde.
olchergestalt wird, nach einer kleinen
ng, die kurze Sprache der Mathema-
in die gewöhnliche überzutragen, man-
Feldmesser, der sonst gewohnt ist, An-
ungen der Buchstabenrechnung in der
schen Geometrie als Pedanterie an-
n, eine vortheilhaftere Meinung von
Verkürzung des Vortrags erhalten,
on der Ungereimtheit seiner erstern
ung überzeugt werden.
er aber demohnerachtet anders denket,
uß freylich einige Kapitel dieses Bu-
bergehen, und nur diejenigen lesen,
zu verstehen glaubt. — Er wird
ch Nutzen davon haben, weil ich das
was mir aus eigenen, und andern
ungen bekant ist, gesamlet, und
andgriffe und Vorsichten dabey be-
en habe.

Die Lehre von Ausmessung der Weiten und Höhen, im XV und XVI Kapitel, sind einfache geometrische Operationen, und enthalten die Gründe, zu der Entwerfung ganzer Figuren die ich im XIX Kapitel vorgetragen habe; man wird in diesem Kapitel nicht leicht eine Methode vermissen, der man sich demnächst unter diesen oder jenen Umständen, mit Vortheil beym würklichen Landmessen bedienen kan. Die Anwendung dieser Methoden, werde ich aber im folgenden Theile dieses Buches mit mehrerem aus einander setzen.

Das XVII Kapitel, und andere in Buche zerstreute Stellen, werden manche Feldmesser, der den Gebrauch des Astrolabii verachtet, und sich wundert, daß man auf Akademien, Lehrlingen der praktischen Geometrie dieses Werkzeug empfiehlt, überzeugen, daß dieses Instrument doch so gar unbrauchbar nicht sey, ja schlechterdings erfordert werde, Arbeiten die in Große gehen, mit Richtigkeit auszuführen. Freylich werden dazu Winkelmesser erfordert, die etwas anders aussehen, als gemeine Mechanici sie vor 50 und mehren Jahren verfertigten, und ein Feldmes-

n seiner Wissenschaft eben so weit zu-
seyn, der jetzt keine andern Winkel-
ser kennt, als solche mit bloßen
tern und auf denen man höchstens
el Grade, oder durch Transversalli-
llenfalls 10 Minuten erhalten kan.
er wird mancher denken, was helfen
ere Werkzeuge, da man doch die
el mit dem Transporteur nicht ge-
zu Papiere bringen kan? diese Frage
niemand thun, der andere Methoden
die im 184 §. kennt, wodurch man
Ausübung alle mögliche Schärfe er-
kan.

an muß beym Gebrauche unterschie-
geometrischen Werkzeuge, jedes nach
bsicht beurtheilen, in der es vorzüg-
ebraucht werden kan. So bedient
sich z. B. zur Messung der Figuren
rem Umkreise immer lieber des Meß-
als des Astrolabii, weil bey dieser
ation selten sehr lange Linien vorkom-
und diese Arbeit meistens nur beym
il einer Messung gebraucht wird, wo-
brigens viele Kleinigkeiten und Ne-
nstände anzumerken sind, die beym
auch des Astrolabii, ein zu weitläuf-

tiges und verworrnes Diarium verursachen würden. Wo aber beym Feldmessen sehr lange Linien vorkommen, wie zum B. in dem Falle, da man aus Standlinien das sogenannte Netze einer Landschaft entwerfen will, und wo doch alle nöthige Richtigkeit erhalten werden soll, da wird man sich keines Instruments als eines Astrolabii bedienen, vorzüglich wenn diese Messung auf ein ganzes Land erstreckt wird, dabey man viele einzelne Messungen zusammen hängen muß.

Ich hätte für die Auflösung verschiedener Aufgaben z. B. für die in §§. 141, 187, 199 VI. VIII, 236 (12) gegebenen Formeln berechnete Tafeln liefern können, wenn ich nicht befürchtet hätte, gegenwärtiges Werk dadurch weitläuftiger zu machen, als nöthig ist, ohnedem, da sich oft nach den Formeln eben so geschwind rechnen läßt, als nach Tafeln, die oft ein mühsames Suchen der Proportionaltheile erfordern.

Ich habe noch einige Druckfehler im ersten Theile bemerkt, und halte es für meine Pflicht, sie nebst denen im gegenwärtigen Theile gefundenen, am Ende dieses Theiles mit anzumerken.

Göttingen im März 1779.

Joh. Joh. Mayer.

Inhalt
trigonometrischen Lehnsätze.

, um wie viel sich ein Sinus oder Cosinus äns
benn der zugehörige Bogen um etwas wächst oder
nt. XXVI, XXX.
viel sich ein Product ändere, wenn jeder Factor
etwas ändert. XXXII.
se Untersuchung vom Quotienten. XXXIII.
iel Tangente, Secante u. s. w. sich änderen wenn
gen um etwas wächst. XXXVII
viel sich einer Zahl Logarithme ändert, wenn sie
u etwas wächst oder abnimmt. XXXIX-XLIV.
die Logarithmen der trigonometrischen Linien äns
venn die zugehörigen Bogen, wachsen oder abs
. XLVII.
aus der sphärischen Trigonometrie, Einleitung
XLIX.
neln für die Auflösung der sphärischen Drepecke
LI. u. f.
ung durch ein Beyspiel. LVIII.
ydeutigkeit bey der Formel $\sin A \sin b = \sin B \sin a$.
Anmerk.

In-

Inhalt

Inhalt des zweiten Theils.

X. Kapitel.

Untersuchung, was für ein Fehler im Winkelmessen e
stehet, wenn das Werkzeug mit einer Kippregel ver
hen ist, und nicht genau horizontal stehet. §. 140.
Daß solche Fehler, unter manchen Umständen ziemlich
trächtlich werden können, wenn das Werkzeug gleich n
eine geringe Neigung gegen den Horizont hat. §. 140. XX
Wenn das Werkzeug mit keiner Kippregel versehen
sondern ein Fernrohr hat, das dem Werkzeuge para
ist, wo man also bey Winkeln, die nicht ho
zontal sind, das Werkzeug vorsetzlich neigen muß,
finden, um wie viel der Horizontalwinkel kleiner o
grösser ist, als der auf dem Werkzeuge erhaltene sch
Winkel. §. 141. II. V.
Ob man sich in der Ausübung lieber eines Werkzeugs
einer Kippregel, oder mit einem parallelen Fernro
bedienen solle. §. 141. VII.

XI. Kapitel.

Fehler beym Winkelmessen, wenn das Fernrohr, als Ki
regel, nicht genau in einer Ebene auf und nieder
weglich ist, die auf dem Werkzeuge senkrecht stehet, u
was dazu erfordert werde, daß sich die Kippregel r
tig drehet. §. 144.
Berechnung dieses Fehlers. §. 146.
Wie man die hiezu gehörige Neigung des Fernrohrs, ü
oder unter Horizontallinie finden könne. §. 146.
Zu untersuchen, ob die Kippregel ihre gehörige Vollk
menheit habe. §. 147.
Die Neigung der Axe um die sich die Kippregel dre
zu finden. §. 148.
Korrektion der gemessenen Winkel. §. 149.
Eine Vorrichtung, der Kippregel die gehörige Vollk
menheit zu ertheilen. §. 150.

X

Inhalt.

XII. Kapitel.

einer Verticalebene auszumessen, und eine hierzu liche Libelle. §. 152.
igenschaften einer guten Libelle. §. 153.
e mit dem Fernrohre parallel zu machen. §. 154.
nkel auszumessen §. 155. und was dabey für ten zu merken. §. 156.
dabey vorfallen können. §. 157.
der Quadranten zur Messung der Verticalwin- Ersparung einer Libelle dabey. §. 158.

XIII. Kapitel.

ler der geometrischen Werkzeuge ausfindig zu , vermittelst des Stangenzirkels. §. 160.
st meines Vaters Methode, Winkel zu messen. §. 161.
st der 90 und 96 Theilung. §. 162.
st der beyden äußersten Theilstriche des Vernier

der Micrometerschraube, die Unterabtheilungen de zu prüfen. §. 164.
rth der Umdrehung einer Micrometerschraube zu §. 165.
des Randes vermittelst einer andern Methode. §. 166.
st eines auf dem Felde abgesteckten Dreyecks. §. 165.
ob die Indices der Verniere ihre Richtigkeit ha- §. 168.
ob ein Winkelmesser excentrisch sey. §. 169.

XIV. Kapitel.

ige Mittel sehr kleine Winkel auf dem Felde zu und hiezu gehörige dioptrische Lehnsätze. §. 171.
ung dieser Sätze; Micrometer in Fernröhren.

Schraubenmicrometer im Fernrohre, den Wertheis- ndrehung zu finden §§. 173. 174. eine Tafel die ich hiezu berechnen könte. §. 174. V. VI.
ter auf Glas mit parallelen Strichen. §. 175; erth der Zwischenräume in Minuten und Secun- finden. §. 175. II. III.

Er-

Inhalt.

Erfindung dieser Micrometer, nebst der Art solche Micr
meter in Fernröhre an Winkelmessern anzubringe
§. 176. II.
Nöthige Vollkommenheit der Glasmicrometer §. 176. IV.
Feinheit der Striche die Hr. Mechanicus Brander au
Glas ziehet, und wie man auf eine sehr leichte A
dergleichen Linien auf das Glas ziehen könne. §. 176. VI

XV. Kapitel.

Ausmessung unzugänglicher Weiten mit der Meßkette,
dem Falle, wenn man von einem Standpunkte nach be
den Enden hinkommen kan. §. 178.
Messung solcher Weiten wenn nur nach einem Endpunk
derselben ein freyer Zugang verstattet ist. §. 179.
Gebrauch einer Chordentafel zu dieser Absicht. §. 179. III. Zu
Eine Weite zu messen zu deren keinem Endpunkte ma
hinkommen kan. §. 180.
Gebrauch entfernter Objekte hiezu. §. 180. IV. Aufl.
Die Aufgabe des 179 §. mit dem Meßtische aufzulösen. §. 18
Die Aufg. des 176 §. mit dem Meßtische aufzulösen. §. 18
Mit dem Astrolabio. §. 183. II. Aufl.
Wie man bey diesen Aufgaben verfahren müsse wenn Durc
schnittpunkte ausserhalb des Meßtisches fallen. §. 183 Anm
Wie man sich das Tragen des Meßtisches von einem Or
zum andern ersparen könne. §. 183. III. Aufl.
Die Aufgabe des 180 §. mit dem Meßtische aufzulöse
§. 184. I. Aufl.
Das Forttragen des Meßtisches dabey zu ersparen. §. 18
II. Aufl.
Auflösung dieser Aufg. mit dem Astrolabio, und Formel
dazu III. Aufl.
Regel, um die ganze Rechnung durch Logarithmen zu fü
ren §. 184. IIi. Aufl. (15.) und durch ein Beyspiel (18
erläutert.
Vermittelst der an der Standlinie mit dem Astrolabi
gemessenen Winkeln, die Weite, die dadurch gemesse
werden soll, durch eine Zeichnung auf dem Papiere z
finden. §. 184. IV. Aufl. Dies kan geschehen entwede
vermittelst des geradligten Tranporteurs, mit dem ma
die Winkel aufträgt IVte Aufl. (I) oder durch Berechnun
der Seiten der Dreyecke an der Standlinie (II) ode
durch Berechnung der Perpendicularlinien (III), die ma
demnächst gehörig an der Standlinie verzeichnet.

An

Inhalt.

gen die Standlinie betreffend, und Mittel Stands
on gehöriger Grösse auszufinden. §. 185.
gebenen Lage dreyer Oerter auf dem Felde, zu fin=
weit ein vierter Ort, von jedem dieser drey Oer=
iegt §. 186. Geometrische Aufl. dieser Aufgabe.
VII.
). Branders Aufl. dieser Aufgabe. §. 187.
e Anmerkungen. §. 188.
zu große Weiten aus einem einzigen Stande zu
§. 189. Das Paccecianische Pantometrum §. 189.
n Gebrauch (14) Entbehrlichkeit (15. 16).

XVI. Kapitel.

zu messen, wenn man von einem angenommenen
nach dieser Höhe horizontal hinmessen kan. §. 190.
von einem angenommenen Stande nicht nach der
senden Höhe hinkommen, aber eine horizontale
nie annehmen kan, die mit dieser Höhe in einer
gt, die Höhe zu finden. §. 191.
er Fälle des 190 und 191 §, wenn man genöthigt
tandlinie schief, aber doch in einer Ebene mit der
senden Höhe anzunehmen. §§. 192. 193.
Standlinie die jede willkürliche Lage und Richtung
Höhe zu messen. §. 193.
nittelst des Barometers zu messen, nebst dem Ge=
die Dichtigkeit der Luft, und die Barometerhöhe,
Stelle über der Erdfläche, von der Höhe dieses Orts,
§. 197.
dieses Gesetzes auf Messung der Höhen §. 197. XI.
r Regel, aus den Barometerhöhen an zwoen Sta=
zu finden, wie hoch eine über der andern liegt.
XIV.
eu] über dieses Verfahren und Verbesserung dieser
rch Hrn. de Luc §. 198. I. II. nebst andern Vor=
en Gebrauch der Barometer betreffend. III. IV. VI.
rümmung der Erde auf die Höhenmessungen vor
abe. §. 199. nebst Formeln das Gefälle zu berech=
199. IV.
der trigonometrisch gemessenen Höhen, wegen
hung der Lichtstrahlen §. 200.
ction ist $\frac{1}{178}$ des Bogens von einem grösten Kreise,
chen der auszumessenden Höhe und dem Orte,
Elevationswinkel gemessen wird, enthalten ist.
X. X.

Was

Inhalt.

Was der verschiedene Grad der Wärme hiebey ände
§. 200. XII.

XII. Kapitel.

Von den Folgen der Fehler in den Messungen. §. 201.
Grösse des unvermeidlichen Fehlers dem man in Messung d
Winkel vermittelst des Astrolabii, und Meßtisches, u.
w. ausgesetzt ist, und für den man nicht gut stehen ka
§. 202.
Gründe zur Berechnung der Folgen dieser Fehler. §. 203. 20
Wie man diese Berechnung allenfalls durch gemeine Trigon
metrie bewerkstelligen könne. §. 205.
Analytischer Vortrag dieser Rechnungsart. §. 206.
In einem Dreyecke die Folgen der in der Grundlinie un
den Winkeln begangenen Fehler zu berechnen. §. 207. un
wie groß die Folge eines Fehlers, in Absicht der Grö
selbst ist §. 207. XIV. Vortheil dieser algebraischen Metho
in Absicht der gemeinen trigonometrischen. §. 207. XIX.
Einige Folgerungen aus dieser Aufgabe in Absicht auf d
Auswahl der Standlinie, und unter welchen Umstände
Entfernungen am richtigsten und vortheilhaftesten gefu
den werden. §. 208. I. II. III.
Wenn ein Winkelmesser die Winkel nur auf 1 Minute genau misse
so kan man auch bey der vortheilhaftesten Lage der Standl
nie, die Seiten eines Dreyecks nicht genauer als auf $\frac{1}{100}$
ihrer Länge sicher finden. §. 208. IV. und man kan zufri
den seyn, mit einem solchen Werkzeuge, die Entfernu
gen nur auf $\frac{1}{400}$ ihre Länge sicher zu finden. (V)
Die Folgen der Fehler in einem Dreyecke zu finden, wen
die beyden Seiten und der eingeschlossene Winkel fehle
haft gemessen worden. §. 209.
Die Folgen der Fehler zu berechnen, in einem Dreyecke, n
zween Winkel und eine Seite, die einem Winkel gege
überstehet, fehlerhaft gemessen worden. §. 211.
Anwendungen auf zusammengesetztere Fälle und Schwüri
keiten in jedem Falle eine geschickte Standlinie auszufinde
§. 212.

XVIII. Kapitel.

Eine Figur auf dem Felde, mit der Meßkette zu Papiere z
bringen, indem man alle Seiten und Diagonalen misse
§. 215.

Inhalt.

auch auf eine andere Art geschehen könne. .219.
geschehen könne, indem man die Winkel mit der
e nach der §. 216. gewiesenen Methode bestimmt.

inigte Figur blos mit der Meßkette zu entwerfen.

g dieser Methode auf Figuren die sehr viele Sei-
n. §. 219.
des Meßtisches eine Figur zu Papiere zu bringen,
) von einem Punkte innerhalb der Figur nach allen
nmessen läst. §. 220.
des Meßtisches eine Figur, die man ganz ums
n zu Papiere zu bringen. §. 222.
man richtig gemessen hat. §. 223.
)n zu finden, wo ein Fehler vorgefallen ist. §. 224.
)afte Figur zu korrigiren. §. 225
ung dieser Methode, wenn an mehreren Statio-
)let worden. §. 226.
rsichten beym Verfahren, eine Figur aus der Peri-
messen. §. 227. Es ist vortheilhaft die Figur zu
ehe man die Messung anfängt. (I). Fehler zu ver-
)enn Theile einer Figur zu nahe an den Rand des
es kommen (II). Wie man sich hilft, wenn die
n zu niedrig sind (III) u. s. w. Anmerkung krumme
treffend.
die man aus einer Station ganz übersehen kan zu
n. §. 228.
aus ihrer Peripherie zu messen, ohne alle Seiten
um messen zu durfen. §. 229.
en über dieses Verfahren. §. 230.
aus einer Standlinie zu entwerfen. §. 231.
ser Methode bey Messungen die ins Große gehen,
e Bemerkungen die Richtigkeit des Verfahrens
Standlinie betreffend. §. 232.
eßtisch nach der Magnetnadel gestellet wird. §. 232.

er Magnetnadel eine jede Station wo man den
hinstellt zu Papiere zu bringen, wenn man nur
bjekte auf dem Felde, bereits auf den Meßtisch
hat §. 233.
ieser Messungsart §. 234.
forderniß dabey, und Mittel die Magnetnadel zu
. §. 235.

Fehler

Inhalt.

Fehler die aus den parallel angenommenen Richtungen de
Magnetnadel entstehen, und Mittel sie zu korrigiren, wen
es nöthig wäre. §. 236.
Eine Figur zu Papiere zu bringen, nach der Methode, di
bey der Zollmannischen Scheibe gebräuchlich ist. §. 237.
Die Aufgabe des 231 Ses mit dem Astrolabio aufzulösen neb
den dabey nöthigen Bemerkungen. §. 239.

XIX. Kapitel.

Durch einen gegebenen Punkt auf dem Felde, mit einer gegeb
nen Linie eine parallele zu ziehen. §. 240.
An eine Linie einen beliebigen Winkel zu setzen. §. 240
Zus. II. III.
Von einem Punkte nach einem andern, den man gar nich
sehen kan, eine Verticalebene oder gerade Linie abzustecken
§. 241.
Eine Figur abzustecken. §. 242.
Noch eine andere brauchbare Aufgabe. §. 243.

zung der im Iten Theile dieses Bu- beygebrachten trigonometrischen Lehnsätze.

uchungen, um wie viel sich die tri- onometrischen Linien ändern, wenn re zugehörigen Bogen oder Winkel, n etwas geringes wachsen, oder ab- hmen.

Es ist schon aus der gemeinen Tri- gonometrie bekant, daß, wenn gen oder Winkel wachsen, auch die Si- Tangenten und Secanten zunehmen, die e, Cotangenten, Cosecanten aber ab. vorausgesetzt, daß die Bogen unter 90° Wenn dieselben über 90° gehen, so die Sinusse u. s. w. wieder ab, und die e u. s. w. nehmen zu. Es ist klar daß änderungen eines Bogens, und der zu-

gehörigen trigonometrischen Linie von einander abhängen — Und da diese Lehren in dem Falle, wo die Winkel oder Bogen sich nur um etwas weniges ändern, künftig bey Berechnung der Folgen der Fehler, wie auch bey andern Gelegenheiten grossen Nutzen haben, so werde ich itzt zeigen, wie man aus dem Wachsthum eines Bogens, die Zu oder Abnahme der zugehörigen trigonometrischen Linie auf eine leichte Art finden könne.

XXVI. Es bedeute also a einen gewissen Bogen, und $a+\alpha$ einen andern Bogen, welcher von dem ersten um den kleinen Bogen α unterschieden ist; Es frägt sich, um wie viel der Sinus von $a+\alpha$ von dem Sinus des Bogens a unterschieden ist.

Um dieses zu bestimmen, so überlege man daß

$$\sin(a+\alpha) = \sin a \cos \alpha + \cos a \sin \alpha$$

ist (Trig. S. XII. 1)

Weil nun α einen sehr kleinen Bogen bedeutet, so kan man ohne merklichen Fehler annehmen, daß der Sinus dieses kleinen Bogens dem Bogen selbst, und der Cosinus desselben dem Sinus totus gleich sey. Da wir also den Sinus totus $= 1$ setzen, so ist ohne grossen Irrthum $\cos \alpha = 1$, $\sin \alpha = \alpha$. Substituirt man

also

Werthe in obigen Ausdruk, so bekömt

$(a + \alpha) = \sin a + \alpha \cos a$ Mithin
$(a + \alpha) - \sin a = \alpha \cos a.$

also der Bogen a um α wächst, mit
in $a + \alpha$ verwandelt, so ist der Sinus
ens $a + \alpha$ um den Werth $\alpha \cos a$ grös-
der Sinus des Bogens a, oder $\sin a$
n $\alpha \cos a$, wenn a um α zunimt.

eser Formel ist nun zu bemerken, daß
t α nicht den Werth dieses Bogens in
oder Secunden setzen dürfe, sondern
, dessen Werth in Decimaltheilen des
otus. Gesetzt nun der Bogen α sey in
n gegeben, so wird dessen Werth in Deci-
en des Sinus totus $= \frac{\alpha}{206264}$ (Trig. S.
)
en Ausdruk mus man eigentlich statt α
. Daher ist

$$(a + \alpha) - \sin a = \frac{\alpha}{206264} \cos a.$$

Um zu sehen, wie das bisherige mit der
t übereinstimmt, so wollen wir $a = 40°$
$1' = 60''$ setzen, mithin untersuchen,
viel der Sinus von $40°1'$ von dem Si-
$40°$ unterschieden ist.

Nach obiger Rechnung wäre also

$$\sin 40^\circ\, 1' - \sin 40^\circ = \frac{60''}{206264} \cos 40^\circ$$

welches man durch Logarithmen auf folgende Ar
berechnet.

log. 60 = 1,7781513
log cos 40° = 9,8842540—10
Summe = 1,6624053
abgez. log 206264 = 5,3144252
läst 3,3479801

Ich habe nemlich die Characteristic des Lo
garithmen 1,6624053 in Gedanken um 7 Ein
heiten vermehrt, damit der Abzug des Logarith
men 5,3144252 bewerkstelliget werden konte
und ein Logarithme übrig bliebe, den man unte
der Characteristic 3 in den Tafeln aufsuchen kan
Man muß aber alsdann von der Zahl die den
Logarithmen 3,3479801 zukömt wie bekant, wie
der 7 Decimalstellen abschneiden. Nun gehör
dem Logarithmen 3, 3479801 die Zahl 2228 zu
Schneidet man also 7 Decimalstellen ab, s
wird

$$\frac{60}{206264} \cos 40^\circ = 0,0002228.$$

D. h. der Sinus von 40° ist um 0,0002228
kleiner als der Sinus von 40° 1', oder wenn
der

en von 40° um 1′ wächst, so nimmt
s dieses Bogens um 0,0002228 Theil.
Halbmessers zu, wie man auch in der
et, wenn man die Sinusse von 40° 1′
40° aus den Tafeln nimmt, und sie
der abziehet.

I. Das Wachsthum, die Abnahme,
haupt die Veränderung einer Grösse
ir künfftig mit dem Buchstaben d be-
welchen man vor diese Grösse setzet.
ir also z. B. andeuten wollen, daß der
um α wächst, so wollen wir statt des-
a den Buchstaben d setzen, und also
hsthum des Bogens a durch d a anzei-
also d a so viel bedeutet als das bishe-

bedeutet also dieser Buchstabe d keinen
sondern ist nur ein willkührliches Zei-
wie man statt der Logarithmen auch
Buchstaben l zu setzen pflegt, und statt
zelgrössen das Zeichen r.

II. So würde also dieser Bezeichnung
as Wachsthum eines Sinus durch d
nes Cosinus durch d cos a u. s. w. ange-
nd es erhellet, daß diese Bezeichnungen
den Werth anzeigen, um den sich Si-
Cosinus eines Bogens a verändern,
Bogen a um α oder d a zunimmt.

Daher wären folgende Ausdrükungen gleich gültig

$$\sin(a+\alpha) - \sin a = \alpha \cos a \text{ oder}$$
$$d \sin a = d a \cos a$$

XXIX. Wenn der Winkel a stumpf ist, s wird cos a negativ, mithin auch d a cos a ode d sin a negativ. D. h. wenn der stumpfe Winke a um d a zunimmt, so nimmt der Sinus desse ben um den Werth d a cos a ab, weil d sin a ode das Wachsthum des Sinus verneint wird, un ein verneintes Wachsthum ein Abnehmen bedeutet; Eben dieser Satz ist aus der gemei nen Trigonometrie, und aus einer zu dieser Ab sicht entworfenen Figur klar, wo man bemerken wird, daß wenn ein Bogen über 90° wächst, der Sinus desselben wieder abnimmt.

XXX. Wir wollen nun auf eine ähnliche Art untersuchen, um wie viel sich ein Cosinus verändert, wenn der zugehörige Winkel um einen geringen Werth wächst. Zu dieser Absicht überlege man, daß wenn a sich in $a+\alpha$ verwandelt, sich cos a in $\cos(a+\alpha)$ oder in $\cos a \cos\alpha -$ sin a sin α (Trig. S. XII. 2.) verwandele; weil nun aus eben dem Grunde wie in (XXVI) cos $\alpha = 1$ und $\sin \alpha = \alpha = d a$ (XXVII) gesetzt werden kan, so erhält man

$$\cos(a + d a) = \cos a - d a \sin a$$

ɔſ(a+da) — coſa = — da ſin a oder
XXVII)
coſa = — da ſin a

der Koſinus des Bogens a nimmt um
rth da ſin a ab, wenn der Bogen a um
ſt, weil eben ſo wie in XXIX eine ne-
unahme wie — da ſin a eine Abnahme

l. Wenn x, y ein paar Gröſſen bedeu-
d man ſetzt x wachſe um dx, y um dy,
r daß die Summe x+y um dx+dy
Unterſchied x — y um dx — dy wach-
e. Eine Gröſſe die man um nichts
oder abnehmen läſt, deren Wachsthum
ull anzuſehen, und man nennt ſolche
unveränderliche — Wenn daher b eine
ahl bedeutet die man als unveränderlich
t, ſo iſt db = o.

II. Wenn man animmt in dem Pro-
y verändere ſich x in x+dx und y in
ſo verwandelt ſich das Produckt xy in
)(y+dy) und wenn man von (x+dx)
) abziehet xy, ſo findet ſich um wie viel
e Produckt xy wächſt, wenn jeder Fak
elben um etwas zunimmt. Nun iſt,
n würklich multiplicirt
+dx)(y+dy) = xy+xdy+ydx
+dy,dx

Ziehet man also davon ab x y, so findet ma
zum Ueberreste den Werth x d y + y d x + d y d x
also um so viel ändert sich das Product y x
wenn jeder Factor sich um etwas ändert Be
zeichnet man also das Wachsthum oder die Ver
änderung des Products mit dem Buchstaben d
so wird

$$d(xy) = x\,dy + y\,dx + dy\,dx.$$

XXXIII. Wenn man auf eben die Art di

$$\frac{x}{y}$$

Veränderung des Quotienten — sucht, unte
der Voraussetzung daß x um d x, und y um
dy wachse, so erhält man

$$\frac{x+dx}{y+dy} - \frac{x}{y}$$ für die Veränderung des
Quotienten. Bringt man nun diese beyden
Brüche unter einerley Benennung, und ziehet sie
würklich von einander ab, so erhält man diesen
Unterschied mithin das Wachsthum oder die Ver-

änderung des Quotienten $\frac{x}{y}$; Folglich

$$d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{y\,dx - x\,dy}{(y+dy).\,y}$$

XXXIV. Diese beyden Formeln (XXXII u.
XXXIII) gelten, die Werthe d x, d y mögen
so groß seyn als sie wollen. Zu unserer Absicht
in der Folge nehmen wir aber an, daß diese

Grös-

dx, dy, in Vergleichung der zugehöri-
, sehr klein sind, und unter dieser Vor-
g lassen sich die beyden Formeln noch
kürzen. Wenn nähmlich in (XXXII)
he dy, dx, sehr klein sind z. E. Brü-
ehr grossen Nennern, oder kleinen Zäh-
uten, so kann man das Produckt dy.
ergleichung der Produckte x dy, y dx
dlich gering, und folglich als verschwin-
ehen. Gesetzt es wäre x = 100; y = 60;
001; dy = 0,0002 so würde
x + x dy + dy. dx =
06 + 0,02 + 0,0000002
offenbar den letzten Bruch, als den
on dy. dx, in Vergleichung der vorher-
Brüche weglassen kan.
dieser Voraussetzung ist daher beynahe
xy) = x dy + y dx
wenn x = y also dy = dx wäre, so
n
$x^2) = x\,dx + x\,dx = 2.\,x\,dx$
rückte also 2x dx aus, um wie viel
Quadrat x^2 einer gewissen Zahl verän-
nn die Zahl x um dx zunimmt.

V. Auf gleiche Weise kann man in der
XXIII statt des Factors y + dy im Nen-
merklichen Fehler bloß y setzen, das
nach

$$\frac{x}{y}) = \frac{y\,dx - x\,dy}{y^2} \qquad \text{XXXVI.}$$

XXXVI. Wenn x eine Grösse wäre, die man un
nichts wachsen oder abnehmen liesse, für die al
$dx = 0$ wäre, so erhielte man bloß $d(x.y) = x\,d$

$$d\left(\frac{x}{y}\right) = -\frac{x\,dy}{y^2}$$

Im letztern Falle ist das Wachsthum de
Quotienten negativ weil der Werth $-\frac{x\,dy}{y^2}$ ne
gativ ist, wenn die Grössen x, dy, als Positi
angesehen werden. Dis zeigt also an, daß de
Quotiente $\frac{x}{y}$ nicht wächst, sondern abnimmt
wenn der Zähler x unveränderlich bleibt, und de
Nenner y um dy wächst. Eben dieses ist auch
schon aus der gemeinen Lehre von Brüchen klar
wo bekanntermassen ein Bruch abnimmt, wenn
der Zähler unveränderlich bleibt, und der Nen
ner grösser wird.

Wenn man die Werthe von dx, dy negativ
nimmt, d. h. wenn man in dem Producte xy,
oder Quotienten $\frac{x}{y}$, die Grössen x, y, um dx,
dy abnehmen läst, so wird für diesen Fall

$$d(xy) = -x\,dy - y\,dx$$

$$d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{-y\,dx + x\,dy}{y^2}$$

VII. Die bisherigen Betrachtungen, ...un dazu dienen, auch für die Tangen... ...canten u. s. w. solche Rechnungen anzu... ...wie in (XXIX. XXX) für den Sinus ...inus gewiesen worden.

...kann nehmlich ebenfalls fragen, um ... die Tangente oder Secante eines Bo... ...achse, oder überhaupt sich verändere, ...an den Bogen a um d a zu oder abnehmen ...m diese Untersuchung erstlich für die ...e anzustellen so überlege man daß

$$\text{...g } a = \frac{\sin a}{\cos a} \text{ mithin auch}$$

$$\text{...ung } a = d\left(\frac{\sin a}{\cos a}\right) \text{ sey}$$

$\frac{\sin a}{\cos a}$ nun einen Quotienten vorstellet, ...ich dessen Veränderung nach XXXV be... ...wenn man das dortige x hier sin a, und ...ge y hier cos a bedeuten läst; Also hat

$$d\left(\frac{\sin a}{\cos a}\right) = \frac{\cos a\, d\sin a - \sin a\, d\cos a}{\cos a^2}$$

...ist aber aus (XXVIII. XXX)

$$\text{...n a} = d a \cos a \; ; \; d\cos a = -\, da \sin a$$

...stituirt man also diese Werthe so wird

sin

$$d\left(\frac{\text{fin a}}{\text{cof a}}\right) = \frac{da\,(\text{cof a}^2 + \text{fin a}^2)}{\text{cof a}^2}$$

Aber $\text{cof a}^2 + \text{fin a}^2 = 1$ alſo

$$d\left(\frac{\text{fin a}}{\text{cof a}}\right) \text{ oder } d\,\text{tang a} = \frac{da}{\text{cof a}^2}$$

Wo man alſo wenn d a gegeben iſt, den Werth von d tang a finden kan.

XXXVIII. Weil $\cot a = \frac{\text{cof a}}{\text{fin a}}$ folglich

$$d\cot a = d\left(\frac{\text{cof a}}{\text{fin a}}\right)$$

ſo ſey jetzt das x in (XXXV) $=$ cof a, und y $=$ fin a ſo wird nach einer ähnlichen Rechnung

$$d\left(\frac{\text{cof a}}{\text{fin a}}\right) = \frac{\text{fin a. d cof a} - \text{cof a. d fin a}}{\text{fin a}^2}$$

$$d\left(\frac{\text{cof a}}{\text{fin a}}\right) = \frac{-da\,(\text{cof a}^2 + \text{fin a}^2)}{\text{fin a}^2} \text{ oder}$$

$$d\cot a = -\frac{da}{\text{fin a}^2}$$

XXXIX. Weil $\text{ſec a} = \frac{1}{\text{cof a}}$ ſo iſt

$$d\,\text{ſec a} = d\left(\frac{1}{\text{cof a}}\right)$$

Man

setze also in XXXV $x = 1$; $y = \cos a$; so sich die 1 nicht verändert $dx = 0$ folg.

$$\left(\frac{1}{\cos a}\right) = -\frac{d\cos a}{\cos a^2} = \frac{da \sin a}{\cos a^2}$$

$$\frac{\sin a}{\cos a} \cdot \frac{1}{\cos a} = da \tang a \sec a \text{ also}$$

$$\sec a = da \tang a \sec a$$

X. Auf eine völlig ähnliche Art, wird

$$\operatorname{cosec} a = \frac{1}{\sin a}$$

$$\operatorname{cosec} a = -da \cot a \operatorname{cosec} a$$

Diese Sätze sind von sehr grossen Nutzen, er Folge werden wir bey Untersuchung r in den Messungen, die Anwendung achen. Anfängern wird es dienlich h Anleitung des Beyspiels XXVI sich hnliche Art den Gebrauch der für d tanga, u. s. w. gefundenen Formeln zu erläu- bey dann zu merken ist, daß man un- nmer das Wachsthum des Bogens a maltheilen des Halbmessers verstehe, man statt da eigentlich $\frac{da}{206264}$ setzen enn da in Secunden gegeben wäre.

Jetzt wollen wir auch die Untersuchung um wie viel sich der Logarithme einer

Zahl

Zahl ändert, wenn die Zahl selbst um etwas ge
ringes zu oder abnimmt. Um dieses zu bestim
men, müssen wir aber vorher folgenden Sa
beybringen.

XLII. Wenn c eine gegebene Zahl bedeute
die grösser ist als 1, und μ einen jedweden unendlic
kleinen Bruch vorstellt, so wird der Ausdruc

$$\frac{c^{\mu} - 1}{\mu}$$

einen unveränderlichen Werth haben
so lange man c nicht ändert, μ mag übrigen
nach Gefallen verändert werden, wenn es nu
immer sehr klein bleibt.

Bew. Es bedeute ϱ einen ganz andern klei
nen Bruch als μ; Kan man nun bewzisen da

$$\frac{c^{\mu} - 1}{\mu} = \frac{c^{\varrho} - 1}{\varrho}$$

sey, so erhellet leicht, daß dadurch zugleich dar
gethan seyn wird, daß sich $\frac{c^{\mu} - 1}{\mu}$ nicht ver
ändere, wenn man gleich statt μ den kleine
Bruch ϱ setzet.

Um also zu beweisen daß $\frac{c^{\mu} - 1}{\mu} = \frac{c^{\varrho} - 1}{\varrho}$
sey, so überlege man folgendes.

Weil

aus der Buchstabenrechenkunst klar ist
$= 1$ sey, so erhellet, daß wenn μ oder ϱ
sehr kleine Brüche sind, die Ausdrükun-

$;c^{\varrho}$ nur etwas sehr geringes grösser als

nnen: Man setze also $c^{\mu} = 1 + m, c^{\varrho} =$
werden auch m, r, ein paar sehr kleine
seyn.

will ich annehmen der kleine Bruch μ
er als ϱ, und also setzen daß μ ein viel-
on ϱ, also $\mu = \alpha\varrho$, und α eine ganze
Wäre z. E. $\mu = 3\varrho$ folglich $\alpha = 3$
bis an, daß der erstere kleine Bruch
grösser als der zweite sey u. s. w.

ch wäre $c^{\mu} = c^{\alpha.\varrho} = (c^{\varrho})^{\alpha} = (1+r)^{\alpha}$

setze nun z. E. es wäre $\alpha = 2$, so wäre

$= (1+r)^2 = 1 + 2r + r^2$; weil aber
ehr kleinen Bruch bedeutet, so kan man
klichen Irrthum das Quadrat des klei-
chs r, als unbeträchtlich in Absicht der
orhergehenden Glieder, weglassen und
ß setzen $(1+r)^2 = 1 + 2r$.

, so wäre $(1+r)^{\alpha} = (1+r)^3 =$
$1+r)^2 = (1+r)(1+2r) = 1 + 3r$

weil man in dem Produkte $(1+r)(1+2r$ gleichfalls die höhern Potenzen des kleinen Bruch r weglassen kan.

Für $\alpha = 4$ hätte man $(1+r)^{\alpha} = (1+r)^4 =$ $(1+r)(1+r)^3 = (1+r)(1+3r) = 1+4$ aus eben dem Grunde.

Wenn man auf solche Art diese Schlüsse we ter fortsetzt, so siehet man leicht daß allg mein

$$(1+r)^{\alpha} = 1+\alpha.r$$

seyn müsse, vorausgesetzt, daß αr auch noch im mer sehr klein bleibt.

Da nun $c^{\mu} = (1+r)^{\alpha}$ so wird auch $c^{\mu} =$ $1+\alpha.r$ seyn. Aber es ist auch $c^{\mu} = 1+m$ g setzt worden, folglich hat man $1+m = 1+\alpha$ oder $m = \alpha.r$.

Es wird also

$$\frac{c^{\mu}-1}{} = \frac{1+m-1}{} =$$

$$= \frac{1+\alpha r-1}{\alpha\varrho} = \frac{r}{\varrho}$$

Ferner auch $\frac{c^{\varrho}-1}{\varrho} = \frac{1+r-1}{\varrho_1} = \frac{r}{\varrho}$

Al

$$\frac{c^{\mu} - 1}{\mu} = \frac{c^{\varrho} - 1}{\varrho}$$

sieht also, daß die Grösse $\frac{c^{\mu} - 1}{\mu}$ einerley Werth hat, obgleich μ nz andern kleinen Bruch als ϱ bedeutet, rhellet daher, daß die Grösse $\frac{c^{\mu} - 1}{\mu}$, egebenes c einen unveränderlichen Werth an mag statt μ für einen kleinen Bruch as man für einen will. Setzt man also

$\frac{c^{\mu} - 1}{\mu} = A$ so ist A eine beständige welche blos von c, aber keinesweges von gt.

$\frac{c^{\mu} - 1}{\mu} = A$; folgt auch $c^{\mu} = 1 + A.\mu$.

isherigen Schlüsse gründen sich darauf, nen sehr kleinen Bruch bedeute; je klei-

ner nun derselbe ist, desto richtiger wird auch
daraus hergeleitete Folge seyn.

Weil $c^{\mu} = 1 + m$ gesetzt worden, so ist

$\mu \log c = \log (1 + m)$ also $\mu = \frac{\log(1+}{\log c}$

mithin

$\frac{c^{\mu} - 1}{\mu}$ oder $A = \frac{m}{\mu} = \frac{m \log}{\log(1+}$

Dieser Ausdruk dienet also die Grösse A zu
den, wenn man m, als einen sehr kleinen Bru
willkürlich annimmt.

XLIII. Gesetzt es sey $c = 10$; $m = 0{,}0000$

so wird $A = \frac{0{,}00000001}{\log 1{,}00000001}$ Aber aus G
diners grosser Logarithmen Tafeln finde ich

$\log 1{,}00000001 = 0{,}000000043429$

dis gäbe demnach

$A = \frac{0{,}00000001}{0{,}000000043429} = \frac{100000}{43429}$

oder $A = 2{,}30258$; Daher wäre allgemein
$c = 10$ der Werth μ

$\frac{10^{\mu} - 1}{\mu} = 2{,}30258.$

XLIV. Nach diesen Vorbereitungen werden
nun die Frage in (XLI) auf folgende Art auflö
Gesetzt es sey $\log x = y$, und die B
des Logarithmischen Systems $= c$, so ist bek

$= x$ sey. Man nehme nun an, daß y
achse, wenn x um dx zunimmt, und
he von dy, dx, seyen in Absicht der
, x sehr klein, so verwandelt sich die

g
$\log x = y$ in
$(x+dx) = y+dy = \log x + dy$;
$+dx) - \log x = dy$ oder welches
ist $\log \left(\frac{x+dx}{x}\right) = dy$ folglich wegen

$\frac{1+dx}{x}$ wird,

$\log \left(\frac{1+dx}{x}\right) = dy$

aber c die Basis des Logarithmischen
ist, so verwandelt sich diese Gleichung

$$c^{dy} = 1 + \frac{dx}{x}$$

n $\frac{dx}{x}$ eine sehr geringe Grösse ist, so
dy einen sehr geringen Werth haben;
daher das μ in (XLII) hier dy bedeu-
at man ohne beträchtlichen Fehler

$c^{dy} = 1 + A\,dy$ wo A eine unverän-
Grösse ist, die von der Basi des log.

Systems abhängt (XLII); Es wird demn

$$1 + A\,dy = 1 + \frac{dx}{x} \text{ also}$$

$$dy = \frac{1}{A} \cdot \frac{dx}{x} \text{ oder}$$

$$d \log x = \frac{1}{A} \cdot \frac{dx}{x}$$

Woraus also erhellet, daß das Wachsth
des Logarithmen der Zahl x herauskömt, w
man das Wachsthum der Zahl x, mit der Z
x selbst dividiret, und den Quotienten mit
unveränderlichen Grösse $\frac{1}{A}$ multiplicirt.

XLV. Für die Briggischen Logarithmen
$e = 10$ und $A = 2{,}30258$ (XLIII) oder
$= 0{,}43429$ mithin, wenn $d \log x$ das Wa
thum des Briggischen Logarithmen der Za
bedeutet, so ist

$$d \log x = 0{,}43429 \cdot \frac{dx}{x}$$

Ex. Um die Wahrheit dieses Satzes mi
nem Beyspiel zu erläutern, so will ich setzen
8900; und $dx = 1$, also untersuchen, um
viel der Logarithme von 8901 von dem Logar

8900 unterschieden ist. In diesem Fal-
lso dieser Unterschied oder der Werth von

$$= 0{,}43429 \cdot \frac{1}{8900} = 0{,}0000488,$$

man auch in der That so findet,
an in den Tafeln die beyden Logarith-
Zahlen 8901, 8900 von einander ab-

; Da die unveränderliche Grösse $\frac{1}{A}$
Basi des logarithmischen Systems ab-
läst sich leicht ein gewisses logarithmi-
stem gedenken, wo $\frac{1}{A} = 1$ wird;
arithmische System nennt man das
e, und was es mit demselben für eine
is habe das gehört in die höhere Ma-
und es würde wider unsere Absicht
on weitläuftig zu handeln, da man
n der practischen Geometrie die natür-
rithmen selten gebraucht. Man sehe
ievon Hrn. H. Kästners An. des Un.

f. Wir wollen künftig den Werth $\frac{1}{A}$
halber mit dem Buchstaben B bezeich-
damit hätte man $d \log x = B. \frac{dx}{x}$.

XLVII. Wir können nun vermittelst des g
fundenen Ausdruks, auch das Wachsthum d
Logarithmen der Trigonometrischen Linien bere
nen, wenn man annimt daß die zugehörigen B
gen, um einen sehr geringen Werth wachs
Man setze zu dieser Absicht statt x, die Wer
sin a, cos a, tang a, cot a, sec a, cosec a so
geben sich daraus folgende Formeln;

1) $d \log \sin a = B \cdot \frac{d \sin a}{\sin a}$; aber $d \sin a =$
$d a \cos a$ also

$$d \log \sin a = \frac{B\, d a \cos a}{\sin a} = B\, d a \cot a$$

2) $d \log \cos a = \frac{B\, d \cos a}{\cos a} = \frac{B\, d a \sin}{\cos a}$

oder

$$d \log \cos a = - B\, d a \tang a$$

3) $d \log \tang a = \frac{B\, d \tang a}{\tang a}$ aber

$$d \tang a = \frac{d a}{\cos a^2}$$ (XXXVII) daher

$$d \log \tang a = \frac{B\, d a}{\cos a^2 \tang a} = \frac{B\, d a}{\cos a \sin a} =$$

$$= \frac{2\, B\, d a}{\sin 2a}$$

) eben ſo

$$\log \cot a = -\frac{2 B d a}{\sin 2 a}$$

$$g \sec a = \frac{B d \sec a}{\sec a} \text{ aber } d \sec a =$$

ang a sec a daher

$$\log \sec a = B d a \tang a$$

) eben ſo

$$\log \operatorname{cosec} a = - B d a \cot a$$

che Formeln durchgehends von ſehr groſ
uchbarkeit ſind, und dazu dienen wer
der Folge die Berechnung die Fehler in
ſſungen ſehr abzukürzen.

III. Man pflegt die bisher vorgetragenen
ſonſt auch in der Differentialrechnung
deln, und leitet ſie aus der Lehre von
inzen der Verhältniſſe her. Da ich dieſe
er nicht vortragen durfte, ohne zu be
, daß manche Leſer darin mehr Geheim
hen mögten, als würklich darinnen ent
ind, da es ferner auch zu meiner Ab
ht nothwendig war, das bisherige den
hen Begriffen der Differentialrechnung
vorzutragen, ſo habe ich einen Weg er
der Anfängern nicht ſo geheimnisvoll
wird, als die Lehre von den Gränzen
hältniſſe verſchwindender oder unendlich

kleiner Grössen, wenn sie sonst nur mit einige
Aufmerksamkeit, die Sätze ansehen und nach
rechnen, wie auch sonst übrigens in Trigonome
trie und der Lehre von Logarithmen die erforder
lichen Kenntnisse haben.

Formeln aus der sphärischen Trigono
metrie.

XLIX. Da es in der practischen Geometri
sehr oft vorkömt, daß man die Lage gewisse
Ebenen gegeneinander betrachten muß, und d
dahin gehörigen Rechnungen zur sphärischen Tr
gonometrie gehören, so habe ich für nöthig e
achtet, hier wenigstens das allgemeine davon
und die Formeln, nach denen dergleichen Rec
nungen anzustellen sind, kürzlich beyzubringen

1. Man stelle sich also (Fig I) vor, RSEF
STFD seyen ein paar Ebenen, die unter ei
nem gewissen Winkel gegeneinander geneigt sind
SF sey derselben gemeinschaftliche Durchschnitts
linie.

2. Man nehme auf SF einen willkührliche
Punkt F an, und stelle sich vor, durch dense
ben werde eine dritte Ebene IK, gelegt, welch
die beyden erstern durchschnitte.

Die Durchschnittslinien FE, FD der Eben
IK mit den Ebenen RSEF, STFD, werde
nu

neinschaftlich durch den Punkt F gehen,
schneidende Ebene l K durch diesen Punkt
t. Man wird also vermöge der drey
hnittslinien, S F, F E, F D um den Punkt
drey ebene Winkel S F E, S F D, E F D
, welche bey F eine sogenannte körperli-
begränzen werden.

usser diesen drey ebenen Winkeln, wel-
die Ecke bilden, kommen nun noch drey
Winkel in Betrachtung, die Neigungs-
er Ebenen gegeneinander, oder die soge-
Flächen Winkel oder auch sphärische
l.

m dieselben zu bestimmen, so seyen in
figur die Linien S F, F E, F D, eben die-
welche sich durch die Durchschnitte der
in der ersten Figur ergeben haben, ders
daß also in der II Figur die drey ebe-
nkel, S F E, S F D, E F D, bey F die
r Iten Figur bilden.

Man nehme nun, um den Neigungswin-
beyden Ebenen, S F E, S F D zu be-
, in ihrer gemeinschaftlichen Durchschnitts-
, einen willkührlichen Punkt k an, und
durch ihn auf S F, ein paar Perpendi-
ien k i, k l, davon k l in der Ebene S F D,
in der S F E liege, so ist bekantermasen

der Winkel, i k l, den diese beyden Linien k i, k
mit einander machen, der Neigungswinkel, de
beyden Ebenen S F E, S F D gegeneinander Au
eben die Art würden die beyden Perpendicular
linien m n, n o, davon m n in der Ebene S F E
und n o in der Eb E F D läge, den Neigungs
winkel dieser beyden Ebenen, und der Winke
q r p, den die beyden durch r auf F D senkrecht ge
zogene Linien q r, r p, mit einander machen, de
Neigungswinkel der beyden Ebenen S F D, E F
bestimmen.

6. Es kommen also solchergestalt bey eine
Ecke, die durch drey Ebenen gebildet wird, sech
Stüke in Betrachtung nemlich 1) die drey ebe
nen Winkel S F E, S F D, E F D die die Ecke
bilden, und 2) die drey Neigungswinkel m n o
i k l, p r q, unter welchen die Ebenen gegeneinan
der geneigt sind, in denen sich die Winkel S F E
S F D, E F D befinden.

7. Man nehme einen willkührlichen Halb
messer an, und beschreibe aus der Ecke F, mit
demselben, in den Ebenen S F E, S F D, E F D,
die drey Kreisbogen A B, B C, A C, so sind
die Bogen A B, A C, B C, der drey Winkel
S F E, S F D, E F D, Maasse. Wenn man
sich mit dem Halbmesser F A eine Kugel um den
Mittelpunkt F beschrieben vorstellet, so würden
die nur erwähnten Bogen A B, A C, B C, Bo-
gen von grösten Kreisen auf der Kugelfläche
seyn, und würden gleichsam auf der Kugelflä-

che,

n Dreyek ABC, das von drey Bogen
Kreise eingeschlossen wäre, abbilden.
Dreyek gehörte also am Mittelpunkte F,
örperlichen Ecke F zu, und wird ein sphä-
Dreyek genannt. Die Bogen AB, AC,
Maasse derjenigen Winkel, welche die dem
ke zugehörige Ecke bilden, heissen Seiten
häri chen Dreyecks.

Man stelle sich bey A, ein paar Tangen-
μ, Aλ vor, davon Aμ, den Bogen AB
nkte A, und Aλ den Bogen AD im Punkte
ihret, so stehen diese beyden Tangenten,
m gemeinschaftlichen Halbmesser AF senk-
da nun auch ik, kl auf AF senkrecht
, so ist ik parallel mit Aμ und kl pa-
mit Aλ, daher der Winkel μAλ = ikl
n. Geom. 46 S. 2 Zus.) Also der Win-
der Tangenten, dem Neigungswinkel der
Ebenen gleich, in denen die Tangenten
ie Bogen AB, AC, oder die zugehörigen
el AFB, AFC, liegen. Da nun die
enten Aμ, Aλ, die Richtungen ihrer Bo-
ey A vorstellen (Kästn. Geom. 41 S. 63)
t man, die Kreise AB, AC, machen bey
inen Winkel BAC, oder μAλ, welcher
Neigungswinkel ikl, der beyden Ebenen
, AFC gleich ist.

gentlich muß man sich bey A ein paar Ele-
e oder unendlich kleine Stükgen der bey-

den

den Kreise A B, A C vorstellen. Der Winke
dieser beyden Elemente, ist mit den Winkel de
Tangenten, oder mit $\mu A \lambda$ einerley, weil di
verlängerten Richtungen dieser Elemente, mi
den Tangenten $A\mu$, $A\lambda$ zusammenfallen.

Auf gleiche Weise, und in eben der Bedeu
tung stellen also auch die Winkel, welche di
Kreisbogen A C, B C bey C, und A B, B C
bey B mit einander machen, die beyden Nei
gungswinkel p r q, m n o, vor.

9. Das sphärische Dreyeck hängt also mit der
Körperlichen Ecke bey F, so zusammen, daß die
Seiten desselben die Maasse der ebenen Winkel
sind, die die körperliche Ecke bilden, und die
sphärischen Winkel B A C, A C B, A B C, den
Neigungswinkeln der Ebenen gleich sind, wel-
che die körperliche Ecke einschliessen.

10. Es ist also klar, daß wenn man die Sei-
ten oder Winkel des sphärischen Dreyecks weiß,
auch die Grösse der ebenen Winkel, welche die
körperliche Ecke bilden, und die Neigungswin-
kel der drey Ebenen der körperlichen Ecke, bes
kant seyn werden.

11. So wie nun in der ebenen Trigonome-
trie gewiesen wird, daß drey Stücke eines Drey-
ecks die übrigen drey bestimmen, so läst sich

gleichs

falls in der sphärischen Trigonometrie dar-
daß aus drey gegebenen Stücken eines
schen Dreyecks, und folglich auch einer
lichen Ecke, die übrigen drey durch Rech-
gefunden werden können.

Was in der ebenen Trigonometrie die
eines Dreyecks sind, das sind in der
schen Tr. die Bogen AB, AC, BC, wel-
s sphärische Dreyeck bilden, oder vielmehr
enen Winkl, AFB, AFC, BFC, wel-
e körperliche Ecke einschliesen; und was
ebenen Trigonometrie die Winkel des Drey-
nd, das sind in der sphärischen Tr. die
el BAC, ACB, ABC des sphärischen
cks, oder die Neigungswinkel, der Ebe-
egeneinander, die die körperliche Ecke be-
n.

Nur muß man bey dem sphärischen Drey-
emerken, daß die Seiten desselben, oder
ogen AB, AC, BC, nicht wie in der
Trigonometrie durch Fußmaaße gegeben
n, sondern daß man ihre Grösse durch Gra-
Minuten u. s. w. angiebt, und daher ist
aß, wenn man den Sinus, die Tangente,
nst eine Trigonometrische Linie für die Sei-
s sph. Dreyecks durch Rechnung gefunden
man aus den Sinustafeln auch sogleich die
dieser Seite in Graden, Minuten u. s.
en wird.

14. Es würde nun viel zu weitläuftig seyn hier die Regeln ausfindig zu machen, wie man in einem sphärischen Dreyecke, aus drey Stükken desselben, die übrigen durch Rechnung bestimmen könne — Ich verweise daher meine Leser auf Hrn. H. Kästners Astron. Abh. I Saml II Abh. oder auf andere Schriften z. E Karstens Mathematic II Theil u. s. w. woselbst sie weitläuftig die Beweise der Vorschriften antreffen werden, die bey den Auflösungen der sphärischen Dreyecke vorkommen. Ich begnüge mich daher hier blos die Formeln ohne Beweis herzusetzen, wornach Anfänger gar leicht die Auflösung eines sphärischen Dreyecks bewerkstelligen werden, wenn sie nur aus demjenigen was ich bisher allgemein beygebracht habe, wissen was sie eigentlich suchen, und dabey die Bemerkung machen, daß sich dasjenige, was sie in einem sphärischen Dreyecke durch Rechnung finden auch allemahl auf die zugehörige körperliche Ecke beziehet.

I. Ich werde nun ein für allemal in einem sphärischen Dreyecke, die drey Winkel desselben mit den grossen Buchstaben A, B, C, bezeichnen, und die gegenüberstehenden Seiten desselben, mit den kleinen Buchstaben a, b, c.

n zur Auflösung sphärischer Dreyecke.

Man kan hier eigentlich 5 Aufgaben in ung ziehen; die erste. Aus drey Stü- nes Dreyecks die übrigen zu finden, wenn ter den gegebenen Stücke ein Winkel und egenüberstehende Seite befinden. Die Aus zwo Seiten und dem eingeschlosse- inkel, das übrige zu finden, die dritte, ner Seite und zween anliegenden Win- und ferner die vierte aus allen drey Sei- nd endlich die fünfte aus allen drey Win- as übrige zu finden Die Formeln für ösung dieser 5 Fälle sind nun folgende.

Für den ersten Fall hat man die Re- aß sich die Sinusse der Seiten, wie die e der gegenüberstehenden Winkel erhalten. also die gegebenen Winkel, A, B, e gegenüberstehenden Seiten, a, b, so n sin A : sin B = sin a : sin b, also n A sin b = sin B sin a.

rch welche Formel also aus zwo Seiten und nen Winkel, der andere Winkel, oder o Winkeln, und einer Seite die andere gefunden werden kan.

Für den zweiten Fall, heise A der ge- Winkel, und c, b, die beyden Seiten die

die ihn einschliessen, so kan man entweder eine
von den beyden übrigen Winkeln C, B, die de
Seiten c, b, gegenüber stehen, oder die drit
Seite a die dem gegebenen Winkel A gegenübe
stehet durch Rechnung finden. Und man hat f
diese beyden Auflösungen folgende Formeln.

$$1)\ \text{tang } B = \frac{\text{sin A tang b}}{\text{sin c} - \text{tang b cos c cos A}}$$

oder wegen $\frac{1}{\text{tang B}} = \text{cot B}$

$$\text{cot B} = \frac{\text{sin c}}{\text{sin A tang b}} - \text{cos c cot}$$

wodurch man den Winkel B findet, welcher t
Seite b gegen über stehet. Verlangte man d
Winkel C, so würde man ihn durch eben die Fo
mel finden, wenn man nur C, b, c, statt B, c, b, se

$$2)\ \text{cos a} = \text{cos A sin b sin c} + \text{cos b cos c}$$

ist die Formel, wodurch aus den beyden Seit
c, b, und dem eingeschlossenen Winkel A, d
dritte Seite a bestimmt wird.

LIV. Für den dritten Fall: seyen A, B, d
beyden gegebenen Winkel, und c die Seite
der sie anliegen, so ist für den dritten der Se
c gegenüberstehenden Winkel.

$$1)\ \text{cos C} = \text{cos c sin A sin B} - \text{cos A cos}$$

eine der beyden Seiten aber

$$\text{) } \text{tang } b = \frac{\sin c \ \text{tang } B}{\cos c \cos A \ \text{tang } B + \sin A}$$

$$\cot b = \frac{\sin A \cot B}{\sin c} + \cos A \cot c$$

ie Seite bedeutet, die dem Winkel B
er stehet.

st klar, daß man auch die Seite b be-
können, wenn man vorher nach (1) den
C gefunden hat — denn alsdann hat
ch der Regel LII.

$$\text{n } C : \sin c = \sin B : \sin b \text{ oder}$$

$$\text{n } b = \frac{\sin c \sin B}{\sin C}$$

Die Auflösung des vierten Falles er-
h sogleich aus der Formel (LIV. 2) denn
folgt umgekehrt

$$\text{s } A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c} \text{ oder}$$

$$\text{s } A = \frac{\cos a}{\sin b \sin c} - \cot b \cot c$$

A der Wi kel ist, den die beyden Sei-
b, einschliessen.

LVI. Wenn endlich für den fünften Fa
die drey Winkel, A, B, C, heisen, und m
will die Seite a haben, welche dem Winkel
gegenüber stehet, so hat man für dieselbe nachst
hende Gleichung

$$\text{col a} = \frac{\text{col A}}{\text{sin B sin C}} + \text{cot B cot C}$$

LVII. Alle diese Formeln sind für den Sin
totus = 1 eingerichtet, daher man auch un
dieser Voraussetzung nach (Trig. S I) die Rec
nung führen muß. Man bedient sich also d
trigonometrischen Linien nicht so, wie sie für d
Sinus totus = 10000000 in den Tafeln ang
geben sind, sondern dividirt vorher jede trigon
metrische Linie der Tafeln, mit der Zahl 10000000
ehe man sie zur Berechnung unserer Forme
braucht. Und wenn nach der Berechnung ei
gewisse trigonometrische Linie für den Halbme
ser 1 herausgekommen ist, so multiplicirt m
sie vorher mit der Zahl 10000000 ehe man
in den Tafeln aufsuchet, und den ihr zugehör
gen Winkel bestimmt.

Die meisten dieser Formeln sind zwar so b
schaffen, daß sie aus zween Theilen bestehen
davon jeder besonders ausgerechnet werden mu
und in so ferne sind sie freylich etwas unbequem
weil die Logarithmen nicht recht bequem dabe
gebraucht werden können. So z. E. bestehet i

LV

ie Formel, wodurch man cos a findet, aus
Theilen $\frac{\cos A}{\sin B \sin C}$; cot B cot C, davon
sonders ausgerechnet werden muß. Ob
hl zwar jeder Theil für sich durch Loga-
ausgerechnet werden kan, so wäre es
sser, die Formel wäre so eingerichtet, daß
cht erst ein paar Theile zusammen addi-
ste um den Cos a zu finden, sondern daß
eradezu statt des Cosinus selbst, den Lo-
nen desselben erhielte. Dis würde ofs
geschehen wenn die Formel für Cos a, nicht
ene Summe zweener Glieder, sondern
in Produckt oder einen Quotienten geges
re. Man hat nun in der That Formeln
h man diese Absicht einer leichtern Be-
g erreichen kan, und man findet sie gleich-
n oberwähnten Astron. Abh Hrn. Hofr.
rs, allein da ich sie zu meiner Absicht
Folge eben nicht gebrauchen werde, so
h sie weggelassen, und bin der Meinung,
enn man auch nur die von mir angegebe-
rmeln braucht, die Rechnung doch eben
weitläuftig nicht ist.

II. Um die Berechnungsart wenigstens
ein Beyspiel hier zu erläutern, und die
Gebrauche vorkommende Erinnerungen des
er ins Licht zu setzen, so will ich z. E. die
(LVI) nemlich

$$\cos a = \frac{\cos A}{\sin B \sin C} + \cot B \cot C$$

dazu gebrauchen, wo ich den ersten Theil $\frac{\cos A}{\sin B \sin C}$ $= x$ und den zweiten $\cot B \cot C = y$ nennen will. Es sey also z. E $A = 135°$; $B = 70°$ $C = 60°$; so ist $\cos A = \cos 135° = \cos(90° + 45°) = -\sin 45°$

Mithin

$$\cos a = -\frac{\sin 45°}{\sin 70° \sin 60°} + \cot 70° \cot 60°$$

Nun ist

$$\left.\begin{array}{r} \log \sin 45° = 9{,}8494850-10 \\ \log \sin 80° = 9{,}9729858-10 \\ \log \sin 60° = 9{,}9375306-10 \end{array}\right\}$$

Summe dieser beyd Log. $= 9{,}9105164-10$

abgezog von l sin 45° läßt $3{,}9389686 = \log x$

Ich habe nemlich die Characteristic des Logarithmen vom sin 45° in Gedanken um 4 Einheiten vermehrt, damit ich einen Logarithmen $13{,}8494850-10$ bekäme, von dem der Abzug des Logarithmen $9{,}9105164-10$ geschehen könte, und zum Reste ein Logarithme übrig bliebe, den man alsdenn unter der Characteristic 3 in den Tafeln aufsuchen könte — Man muß aber hierauf von der Zahl welche dem Logarithmen 3,9389686 zugehöret, wieder so viel

Deci-

lstellen abschneiden, um so viel Einhei-
wähnte Characteristic vermehret worden
n gehört dem Logarithmen 3 9389686
l 8689 zu, daher 4 Decimalstellen ab-
ten giebt

x = 0,8689
st log cot 70° = 9,5610659—10
log cot 60° = 9,7614394—10

umme = 19,3225053—20

vermehre ich gleichfalls die Characteristic
Einheiten; denn wird 23,3225053—20 =
53, von der Zahl aber die nun diesem
ömt, schneide ich auch 4 Decimalstellen
dividire sie mit 10000, und finde so-

y = 0,21013
also cos a = —x+y = — 0,86890+
= — 0,65878; Dis wäre also cos a
Sinus totus = 1, daher für den Sinus
10000000, wird
a = — 6587800

aber dieser Cosinus negativ ist, so zeigt
, daß der Winkel a stumpf seyn müsse.

suche also in den Tafeln einen spitzen
, dessen Sinus die gefundene Zahl
ist, addire dazu 90° so hat man den
oder Bogen a = 41° 12' + 90° =

Eigentlich fällt a zwischen 131°12' und 131°13'
Wenn man die bey diesem Beyspiel vorkom
menden Erinnerungen sich wohl bekannt gemach
hat, so wird es keine Schwierigkeit haben au
eine ähnliche Art in jedem Falle, mit den übr
gen Formeln die Rechnungen gehörig anzustellen

Anmerkung. Die meisten von den oben an
geführten Formeln sind so beschaffen, daß sie i
jedem Falle anzeigen ob der gesuchte Bogen ode
Winkel, spitz oder stumpf ist. Das entscheide
sich in solchen Fällen, wo die gesuchte Grös
durch einen Cosinus oder Tangenten gefunde
wird; denn wenn diese trigonometrischen Linie
bejaht oder verneint werden, so gehören sie z
spitzen oder stumpfen Winkeln.

In einigen Fällen, wo die unbekante Grös
durch einen Sinus gefunden wird, findet ein
Zweydeutigkeit statt. Denn da bekantermassen
ein Sinus so wohl zu einem spitzen, als stum
pfen Winkel (wo letzterer die Ergänzung des sp
tzen zu 180° ist) gehört, so müssen andere Un
stände entscheiden, welchen man von beyde
Winkeln, zu denen der gefundene Sinus g
hört, nehmen müsse. Solchergestalt ist die Fo
mel (LII) sin A : sin a = sin B : sin b, von d
Beschaffenheit, daß es unentschieden bleibt, o
man den aus ihr gefundenen Bogen oder Winke
spitz oder stumpf nehmen müsse. Andere Un
stände der Aufgabe, werden aber in dem meiste
Falle diese Zweydeutigkeit entscheiden.

practischen Geometrie
II. Theil

X. Kapitel.

ie Fehler die beym Winkelmessen, ühren, wenn die Ebene des Werk- nicht genau horizontal gestellet worden.

I. Wir haben schon im vorhergehenden bemerkt, daß, wenn das genau in einer auf das Werkzeug senkEbene auf und nieder beweglich, und kzeug genau horizontal gestellet worden n am Mittelpunkte des Winkelmessers genau den Horizontal-Winkel erhalte, ween Objekte, nach denen das Fernrohr worden ist, daselbst mit einander mas r wenn man sich durch den Mittelpunkt,

und durch beyde Objekte ein paar Verticalebene vorstellet, so ist oberwähnter Winkel genau d Neigungswinkel dieser beyden Ebenen gegenei ander. Wenn aber das Werkzeug nicht gen horizontal stehet, wie es dann wegen vieler Urs chen, nie völlig genau geschehen kan, so wi auch, der Winkel, um den die Alhidadenreg herumgedrehet worden ist, nicht genau der Hor zontalwinkel der beyden Objekte seyn, sonde von demselben um eine gewisse Grösse unterschi den seyn; Ein Feldmesser muß nun wissen, u ter welchen Umständen dieser Unterschied beträch lich ist oder nicht, und daher werden folgend Untersuchungen nützlich seyn.

II. Es sey also (Fig III) der Bogen A C ein Stück von dem Rande eines gegen den H rizont schief stehenden Winkelmessers, un E dessen Mittelpunkt. Der Winkelmess schneide die Horizontfläche, in der geraden Lin E A. Um nun den Winkel, den die Ebene de Werkzeugs mit der Horizontalfläche macht, a zubilden, so beschreibe man mit dem Halbme ser E A, in der Horizontalfläche, den Kreisbo gen A B H, so ist der sphärische Winkel G A H die Neigung des Werkzeugs gegen die Horizon talfläche (Trig. S. XLIX. 7 8.)

III. Es sey auf dem Werkzeuge der Punk C derjenige, von dem die Grade angerechne werden

oder der Punkt o auf den Eintheilun-
Randes.

Das Fernrohr E D des Winkelmessers
indem die Alhidadenregel, oder der In-
Vernier o° weiset, nach einem gewissen
hingerichtet, und die Axe des Fernrohrs
s ich hier als eine Kippregel betrachte)
n dieser Richtung mit der Ebene des
ıas den Neigungswinkel D E C, dessen
ıan sich also auf der Fläche des Werk-
hkrecht vorstellet.

Beschreibt man mit dem Halsmesser E C,
Ebene D E C, den Kreisbogen C D,
derselbe das Maaß des Neigungswinkels
nrohrs gegen die Ebene des Werkzeugs

Besetzt nun, die Alhidadenregel E C,
ıs der Lage E C, in die Lage E G ge-
bey der das Fernrohr E F nach einem
Objekte hingerichtet ist, so wird es mit
ıe des Werkzeugs den Neigungswinkel
achen, dessen Maaß der mit dem Halb-
E G = E C beschriebene Kreisbogen

Stünde also die Ebene des Werkzeugs
rizontal, so wären die Ebenen D E C,
ı paar Verticalflächen, die erweitert,

durch die beyden Objekte, nach denen das Fern
rohr E D, E F gerichtet ist, gehen würde, de
Winkel C E G am Mittelpunkt des Werkzeugs
wäre dieser beyden Verticalflächen ihr Neigung
winkel, den man auszumessen verlangte (§ 132
und der von der Alhidadenregel durchlaufene Bo
gen C G, das Maas dieses Winkels.

VIII. Da aber vorausgesetzt wird, daß de
Winkelmessers Ebene, gegen die Horizontalfl
che schief stehet, so sind auch die Ebenen D E C
F E G nicht vertical, mithin der Winkel G E
auch nicht der wahre Horizontalwinkel der be
den Objekte, oder die Neigung der beyden Ver
ticalebenen, in denen die Objekte liegen (VII
und dieser ist es doch, den man in der practische
Geometrie eigentlich verlangt.

IX. Man gedenke sich also durch beyde Rich
tungen des Fernrohres, in denen die Objekt
erscheinen, ein paar Verticalebenen E D B, E F H
die die Horizontalfläche, in den Horizontallinie
E B, E H durchschneiden, so ist der Winkel die
ser beyden Horizontallinien, d. i. H E B, eigen
lich der wahre Winkel, den man verlangt, un
der Bogen B H dessen Maaß.

X. Nun sind offenbar die beyden Bogen C G
B H von einander unterschieden, und wenn ma
daher den Bogen C H, um den die Alhidaden
rege

drehet worden, für das Maaß des Hori-
inkels, BEH annehmen wolte, so wür-
offenbar einen Fehler begehen, der so
ire, als der Unterschied der beyden Bo-
G — BH.

Diesen Unterschied nun zu bestimmen, ist
icht gegenwärtiger Aufgabe, und ver-
der sphärischen Trigonometrie, die man
enbar zu Hülfe nehmen muß, weil die
gen verschiedener Ebenen gegeneinander
trachtung kommen, wird die Aufgabe
gende Art aufgelöset.

Es sey der Neigungswinkel des Werk-
gegen die Horizontalfläche, oder der sphä-
Winkel CAH = k; der Bogen AC, um
Alhidadenregel, bey der Richtung des
ors nach dem ersten Objekte, von der ge-
aftlichen Durchschnittslinie EA des Werks
mit der Horizontalfläche, entfernt ist, heisse
sen muß man eigentlich als bekant anneh-
wenn man gegenwärtige Aufgabe auflö-

Bogen CG um den die Alhidadenregel
t worden nenne man = α.

Bogen AB = φ; den AH = ψ;
gebenen Neigungswinkel DEC = β;
= b.

Hat

Hat man nun aus den bekant angenommen
Grössen λ, α, B, b, k, die beyden Bogen
φ, berechnet, so ist ψ — φ, oder der Bog
BH gefunden, welcher demnächst mit CG ob
dem Bogen α verglichen, die Grösse des Fehle
geben wird welchen man aus der schiefen La
des Werkzeugs zu befürchten hat. (X)

XIII. Um also die beyden Bogen AB, u
AH, oder die Werthe von φ, ψ, zu bestim
men, so stelle man sich den Bogen DC, o
ein Stük eines grösten auf ACG senkrechtstehe
den Kreises, bis nach L verlängert vor, derg
stalt, daß der Bogen CL = 90° werde,
ist bekantermaassen, L der Pol des Kreis
ACG;

XIV. Da gleichfalls DB auf AB senkrec
stehet, so nehme man auch den Bogen BP =
90°, so ist P der Pol des grösten Kreis
ABH.

XV. Nimt man auch die Bogen ACI, ABK
= 90° und legt durch die Punkte K, I eine
grösten Kreis, KIPL, so gehet dieser durch d
beyden Pole L, P (aus Hrn. H Kästners Ge
metrie 49 u. f Sätzen) und man erhält ein sphä
risches Dreyeck LPD.

XVI. Weil man nun AI = AK = 90° ge
nommen hat, so ist der Punkt A des Kreise
KIP

Pol, und der Bogen K I bekantermaßen
aas des sphärischen Winkels I A K (K.
52 S. 3 Zus.). Ferner sind aber, weil L
ises A G I Pol, und P des Kreises A B K
die Bogen L I = 90° ; P K = 90°
= P K ; das heist L P + P I = P I + I K
L P = I K ; also ist die Entfernung L P
en Pole, dem Bogen I K, oder dem
des sphärischen Winkels I A K gleich,
die beyden Kreise A G I, A H K, zu des
P als Pole gehören, mit einander

. Weil ferner L des Kreises A G I Pol
t der Bogen C I das Maaß des sphäri-
inkels C L I, und aus eben dem Grunde,
des Kreises A B K Pol ist, wird auch
en B K des sphärischen Winkels B P K
eyn.

l. In unserm sphärischen Drevecke L P D
D = L C — C D = 90° — β (V. XII)
rische Winkel L P D = 180° — D P I
— B K weil nemlich B K des sphärischen
D P I Maaß ist (XVII). Aber B K = 90°
= 90° — φ (XII.) daher L P D =
(90° — φ) = 90° + φ.

so des sphärischen Winkels D I L Maaß
en C I (XVII) = 90° — A C = 90°
XII)

XIX.

XIX. In dem sphärischen Dreyecke LP
suche man nun aus den beyden Seiten LD = 9
— β; LP = k (XII. XVI) und dem ein
schlossenen Winkel DLP = 90° — λ, den W
kel LPD = 90° + φ; so wird man erstlich
nen Ausdruck bekommen, wodurch sich der W
gen φ bestimmen läst Nun ist, aus (Tr
S. LIII. 1.) (wenn das dortige A hier den sp
rischen Winkel DLP, das dortige B den sphä
schen Winkel LPD, und die beyden Seiten L
LD die dortigen c, b bedeuten)

$$\text{tang LPD} = \frac{\text{sin DLP. tang LD}}{\text{sin LP} - \text{tang LD cos LP cos D}}$$

Es ist aber LPD = 90° + φ, also tang LP
= tang (90° + φ) = — cot φ
DLP = 90° — λ; also sin DLP = sin (9
— λ) = cos λ und cos DLP = cos (90° —
= sin λ.
LD = 90° — β; daher tang LD = tang (9
— β) = cot β.
Und endlich weil LP = k, so ist sin LP =
cos. LP = cos k.

Substituirt man also diese Werthe in den
fundenen Ausdruck, so erhält man

$$-\cot\varphi = \frac{\cos\lambda \cot\beta}{\sin k} - \frac{}{\cot\beta \cos k \sin\lambda}$$

u

glich wegen $\frac{1}{\cot \varphi} = \text{tang } \varphi$

$\text{ng } \varphi = \text{col k tang } \lambda - \frac{\text{sin k tang } \beta}{\text{col } \lambda}$

Solchergestalt ist erstlich aus dem Bo-
$= \lambda$, dem Winkel $DEC = \beta$ und dem
gswinkel $CAH = k$, der Bogen AB
auf der Horizontalfläche gefunden.

man auf eine ähnliche Art aus dem Bo-
$G = \lambda + CG = \lambda + \alpha$, aus dem Win-
$= b$, und dem Neigungsw. k den Bo-
l oder ψ auf der Horizontalfläche bestim-
wird man ihn durch eben dieselbe For-
en, welche wir für den Bogen $AB =$
sgebracht haben; denn es erhellet daß
obige Formel nur statt φ setzen dürfe ψ,
den Buchstaben b, und statt des Bogens
λ, den Bogen $AG = AC + CG =$
Also ist

$\psi = \text{col k tang } (\lambda + \alpha) - \frac{\text{sin k tang b}}{\text{col } (\lambda + \alpha)}$

Aus denen solchergestalt gefundenen Bo-
$H = \psi$, $AB = \varphi$ hat man nun auch
erschied $\psi - \varphi$ oder den Bogen BH, wel-
t $GG = \alpha$ verglichen, den Fehler ge-
ben

ben wird, welcher aus der schiefen Lage des W
zeugs gegen den Horizont zu befürchten stehet.

XXII. In den meisten Fällen wird freyli
der Fehler aus der schiefen Lage des Werkzeu
nicht sehr g oß seyn, vorausgesezt daß das I
strument mit dem Horizonte nur einen sehr k
nen Winkel macht; Indessen giebt es aber a
Fälle, wo gleich bey einer nur sehr geringen N
gung dennoch ein sehr beträchtlicher Fehler e
stehen kan, und ein Feldmesser muß daher sel
gen zu bestimmen wissen, wenn er die Unri
tigkeit in der Stellung des Werkzeugs, entw
der muthmaßlich annimmt, oder dieselbe so
als bekannt voraus sezt.

XXIII. Ich will die gegebenen Formeln
ßt durch ein Beyspiel erläutern.

Es sey $k = 1°$; $\beta = 4°$; $b = 10°$;
$= 30°$ und $\alpha = 50^c$, so wird für den W
kel φ

$$\log \cos k = 9{,}9999338 - 10$$
$$\log \operatorname{tang} \lambda = 9{,}7614394 - 10$$
$$\text{Summe } 0{,}7613732 - 1$$

Hierzu gehört die Zahl

$$\cos k \operatorname{tang} \lambda = 0{,}5772623$$

Ferner ist

log sin k = 8,2418553—10
g tang β = 8,8446437—10
Summe 17,0864990—20
n l col λ = 9,9375306—10
0,1489684 — 3

iesem Logarithmen gehöret die Zahl
0,0014091
k tang β
welche abgezogen von 0,5772623
ol λ
läßt tang φ = 0,5758532
h aus den Einustafeln φ = 29°. 56'. 7"
Winkel ψ ist
log col k = 9,9999338—10
ang (λ + α) = 0,7536812
0,7536150
ie Zahl 5,6704183 gehöret, welc
Werth von cosk tang (λ + α) ausdrükt,
ist
log sin k = 8,2418552—10
log tang b = 9,2463188—10
Summe 17,4881741—20
log cos (λ+α) = 9,2396702—10
0,2485039 — 2
die Zahl $\frac{\sin k \tang b}{\cos(\lambda+\alpha)}$ = 0,0177232

gehöret, welche abgezogen von 5,6704183

läst tang ψ = 5.6526951

Daher ψ = 79°. 58'. 4"

φ = 29°. 56' 7"

Also $\psi - \varphi$ = 50°. 1'. 57"

Da nun α = 50°. 0'. 0"

so ist $\psi - \varphi - \alpha$ = 1'. 57"

Es ist also der wahre Horizontalwinkel in d
sem Beyspiel um 1' 57" beynahe um 2' grö
als der, welchen das geneigte Werkzeug
giebt, wenn man also den Bogen CG = α
dem Rande des Winkelmessers für das Ma
des Horizontalwinkels BEH = $\psi - \varphi$,
nehmen wolte, so würde man bey den angeno
menen Umständen einen Fehler von beynahe
Minuten begehen.

XXIV. Dieser Fehler wäre nun in diese
Beyspiel an sich eben so gar beträchtlich nic
indessen könten doch Umstände vorkommen,
er beträchtliche Folgen nach sich ziehen könt
und aus diesen muß der Feldmesser beurtheile
ob er ihn auser Acht lassen darf oder nicht.

XXV. Bey andern Datis kan aber in d
That der Fehler von einer solchen Beträchtlic
keit werden, daß ihn ein Feldmesser gewis nic
für Nichts a sehen darf. So z. E. wenn m
in obigen Formeln $\lambda = 0$, $\alpha = 90°$, β =

$= 15'$ und $k = 1°$ annehme, so fände
ch gehöriger Rechnung $\varphi = -21' 50''$;
egative zeigt hier an, daß dieser Bogen
rechter Hand des Punktes A, sondern
Hand desselben z E. von A bis Z zu neh-
) Ferner findet sich $\psi = 90°$; also
$\beta = 90° - (-21'. 50'') = 90°$
$50''$; Da nun α bloß $= 90°$ ist, so
$- \varphi$, oder der Horizontalwinkel in dies
lle um $21'. 50'$ grösser, als derjenige,
s Werkzeug angiebt welcher Fehler ge-
ht für Nichts angesehen werden kan; Und
Werkzeug nur um $1°$ gegen die Hori-
äche geneigt war, und dennoch ein so be-
her Fehler daraus entstanden ist, so er-
ieraus zulänglich, was der Geometer für
tigkeit anwenden müsse, in dem Falle,
Werkzeug mit einem in einer Vertical-
auf und nieder beweglichen Fernrohre ver-
t, den Winkelmesser so genau als mög-
izontal zu stellen, wenn er sich anders un-
issen Umständen nicht sehr groben Fehlern
n will.

e Folgerungen aus dem bisherigen

41. I. Es erhellet, wenn man in obigen
n $k = 0$ setzte, oder das Werkzeug keine
ng gegen den Horizont hätte, daß alsdenn
$\sin k = 0$ und $\cos k = 1$, seyn würde

tang φ = tang λ und folglich φ = λ
tang ψ = tang $(\lambda + \alpha)$ mithin ψ
$\lambda + \alpha$
Also $\psi - \varphi$ = α; daher $\psi - \varphi - \alpha$ =
d. h. es würde in solchem Falle bey Ausmess
der Winkel kein Fehler entstehen, die Neig
des Fernrohrs gegen das horizontalgestellte W
zeug mag beschaffen seyn, wie sie will, oder
Winkel b, β mögen von jeder willkührlichen G
se seyn. Allemahl bleibt der von der Alhida
regel beschriebene Bogen α, das Maaß
wahren Horizontalwinkels $\psi - \varphi$. Dies
hellet auch schon aus dem vorhergehenden,
wird also durch gegenwärtiges noch mehr
stätigt.

II. Setzt man in obigen Formeln b = β =
oder nimt man an, das Fernrohr sey der Eb
des Werkzeugs parallel, so wird

tang φ = tang λ cos k
tang ψ = tang $(\lambda + \alpha)$ cos k

Diese Formeln dienen also dazu die Fehler
bestimmen, welche aus der geneigten Lage
nes solchen Werkzeugs entstehen, dessen Fe
rohr nicht wie eine Kippregel auf und nieder
weglich, sondern parallel mit der Ebene d
Werkzeugs unbeweglich verbunden ist (§. 100

III. Wenn man mit einem solchen Inst
mente Horizontalwinkel messen will, so müs

egenstände, nach denen man visiret, in ei-
orizontalebene durch den Mittelpunkt des
zeugs, liegen — Da aber dieses gar selten
m Felde zutrift, so neigt man das Werk-
orsetzlich, so, daß dessen Ebene durch die
Objecte gehe. Dadurch bekömt man
par auf dem Instrumente nicht den wah-
rizontalwinkel am Mittelpunkte desselben,
einen schiefen Winkel $= \alpha$ und man
daher vermittelst der Formeln (II) den
Horizontalwinkel $\psi - \varphi$ durch
ung zu bestimmen suchen, wobey
enn freylich die Neigung des Instruments
den Horizont als bekant ansehen muß.

In den Formeln (II) müste aber auch
erth des Bogens λ d h. in Fig. III der
AC, um welchen die Richtungslinie EC
em ersten Objecte, von dem gemeinschaft-
Durchschnitte EA des Werkzeugs mit dem
nte, entfernt wäre, gegeben seyn; da es
wer hält bey einer vorgegebenen Neigung
erkzeugs, die Grösse des erwähnten Bo-
A ausfindig zu machen, oder nur muth-
anzunehmen, so werde ich für den Fall (II)
dere Auflösung beybringen, bey der nicht
gen $AC = \lambda$, sondern vielmehr die Ele-
winkel der Objecte, nach denen das Fern-
richtet ist, als bekant angenommen wer-

den; diese Winkel lassen sich entweder selbst m
sen, oder doch weit sicherer nach dem Augenm
se annehmen, als der Bogen λ.

V. Es sey also ACG (Fig. IV) das Werkzeu
in einer gegen den Horizont AEF geneigten
ge; H dessen Mittelpunkt; HC, HG die beyd
Richtungen des mit der Ebene des Werkzeu
parallelen Fernrohrs, nach denen beyden Objekt
deren Horizontalwinkel man finden soll.

Man gedenke sich durch die Richtungen H
HG ein paar Verticalebenen CHE, GHF, d
den Horizont in den geraden Linien HE, H
durchschneiden; so ist EHF der wahre auszum
sende Horizontalwinkel; Statt dessen findet m
aber, indem das Fernrohr aus der Richtun
HC in die HG gedrehet wird, auf dem Ran
des Werkzeugs den Winkel CHG, dessen Ma
der Bogen CG ist; so wie EF des Horizonta
winkels Maaß ist.

So viel nun die beyden Bogen CG, E
von einander unterschieden sind, so groß ist de
Fehler der daher rühret, daß man den Boge
CG auf dem schief stehenden Werkzeuge für de
Bogen EF oder für das Maaß des Horizontal
winkels EHF annimt.

Anstatt daß ich nun den Neigungswinke
GAF des Werkzeugs gegen den Horizont und de
Bogen

n AC = λ in Rechnung bringe, so will
nehmen, es seyen der Objecte, nach denen
ichtungen HC, HG des Fernrohrs zulau-
ihre Elevationswinkel EHC, FHG entwe-
ürklich gemessen, oder nach dem Augen-
e angenommen worden. Daraus wird sich
ächst auf eine leichte Art, der Bogen EF
as Maaß des Horizontalwinkels, durch
ung finden lassen.

sey also der Winkel CHE = ε; GHF = e
ogen CG = α Das Maaß des Horizon-
nkels, oder der Bogen EF = φ.

, GF, seyen ein paar Kreisbogen, mit
Halbmesser HC = HG, in den Vertical-
n CHE, GHF beschrieben.

so CE = ε; GF = e, weil sie der Win-
HE, GHF Maaße sind.

an nehme nun ECP = 90° und FGP =
so ist P des Kreises AEF Pol, weil die
en CHE, GHF auf dem Horizonte AEF
cht stehen; und das sphärische Dreyeck
hat bey P einen Winkel, dessen Maaß ist
ogen EF = φ.

eil nun PC = 90° — CE = 90° — ε;
= 90° — GE = 90° — e; und CG =
sind die drey Seiten des sph. Dreyecks

bekant, daher kan man den Winkel CPG =
nach (Trig. § LV) durch Rechnung finde
und wenn man die dortigen b, c, a hier die
gen PC, PG, CG bedeuten läst, so erhält m
in unserer Figur

$$\cos P = \frac{\cos CG}{\sin PC \sin PG} - \cot PC \cot$$

Nun ist aber $\cos CG = \cos \alpha$; cot PC
$\cot (90° - \varepsilon) = \tang \varepsilon$, ferner cot PG =
$(90° - e) = \tang e$; sin PC = sin $(90° -$
$= \cos \varepsilon$ und sin PG = sin $(90° - e) =$ co

Diese Werthe also substituirt, geben co
oder

$$\cos \varphi = \frac{\cos \alpha}{\cos \varepsilon \cos e} - \tang \varepsilon \tang e$$

Wo man also aus den gegebenen Stücke
α, ε, e den Horizontalwinkel φ berechnen ka
Seine Vergleichung mit dem Bogen α gi
den Fehler welcher aus der geneigten Lage d
Werkzeugs herrühret.

Ex. Es sey α = 57° 25′; ε = 2° 25′
= 4° 58′ so wird

log cos ε	=	9,9996136 — 10
log cos e	=	9,9983663 — 10
Summe	=	0,9979799 — 1 abgez

log cos α = 9,7312064—10 läst

os α
——— = 0,7332265 — 1
e cos ε
die Zahl 0,541036 gehört.
ist log tange = 8,9390321—10
log tang ε = 8,6253518—10

mme = 0,5643839 — 3
die Zahl tang ε tang e = 0,003667 ge-

ziehe also von 0,541036
ab 0,003667

man cos φ = 0,537369
an durch Proportionaltheile findet φ =
29' 43" da nun α = 57°. 25' war so
— α = 4'. 43" so groß wäre also der Feh-
enn man den Bogen CG = α = 57° 25'
s Horizontalwinkels φ Maaß annehmen
letzterer ist eigentlich bey den angenom-
Umständen um 4' 43" gröſſer als der,
n das Werkzeug angiebt.

f diese Art erhellet, wie man in jedem Fal-
aus den Elevationswinkeln CHE, GHF,
an etwa nach dem Augenmaaße schätzen,
auch selbst messen kan, den schiefen Winkel
, den man auf dem Werkzeuge angege-
ndet, in den zugehörigen Horizontalen EHF
ndeln könne.

Es kömt übrigens nur darauf an, die El
kionswinkel etwa höchstens nur bis auf einen
ben Grad genau zu wissen, und hierzu wer
sich einem Geometer gar leicht Mittel darbie
dieselbigen zu schätzen, wenn wir gleich
nicht wissen Winkel in einer Verticalfl
würklich auszumessen.

Das gegebene Ex. ist aus Hrn. H. Käst
Astron. Abhandl. I. S. pag. 39;

Da in der Ausübung oft Werkzeuge gebra
werden, die kein in einer Verticalfläche
und nieder bewegliches Fernrohr haben,
dern wo es unbeweglich und parallel mit
Werkzeuge angebracht ist (wie sich z. E. auf
nes Vaters Astrolabio §. 100 ein solches F
rohr befindet) so siehet man leicht, wie nöthig
nem Geometer die bisherigen Rechnungen si
wenn er mit einem solchen Werkzeuge, welc
er vorsetzlich neigen muß, dem ohnerachtet
wahren Horizontalwinkel finden will.

VI. Es ist in der III Figur angenomm
worden, daß das Werkzeug AG seine Neigu
über der Horizontalfläche habe — Ist aber
Werkzeug unterhalb des Horizontes geneigt,
muß man den Winkel k in obigen Formeln
140 XIX. XX) als negativ ansehen. Hiebey m
man nun überlegen, daß der Sinus eines ne

Winkels, negativ ist, der Cosinus desselben positiv bleibt, mithin hat man für die-

$$\text{ang}\,\varphi = \text{cos}\,k\,\text{tang}\,\lambda + \frac{\text{sin}\,k\,\text{tang}\,\beta.}{\text{cos}\,\lambda}$$

$$\text{ang}\,\psi = \text{cos}\,k\,\text{tang}\,(\lambda+\alpha) + \frac{\text{sin}\,k\,\text{tang}\,b}{\text{cos}\,(\lambda+\alpha)}$$

. Herr Prof. Meister hat in einem Pro-
. de erroribus qui a situ instrumenti non
angulorum mensuram ingrediuntur Goett.
die bisherige Aufgaben gleichfalls unter-
und zwo Tafeln nach seinen Formeln be-
, die erste, für die Fehler, die daher
, wenn die Ebene des Werkzeugs gegen
rizontalfläche geneigt, das Fernrohr aber
mit dem Werkzeuge ist; die andere, für
hler, die aus der schiefen Lage eines Werk-
ntstehen, dessen Fernrohr, wie eine Kipp-
uf und nieder beweglich ist. Diese Ta-
d sehr bequem, und für diejenigen wohl
auchen, die nicht nach den Formeln rech-
llen.

erste Tafel Hr. Pr. M. ist nach Formeln
et, die mit der (II) übereinkommen, da-
aber wegen des Winkels λ die Erinne-
II) zu machen habe. Er hat diese 1te Ta-
$k = 1°$ $k = 2°$; $k = 3°$; $k = 4°$;

berech-

berechnet, und die Art wie aus dieser Tafel
nöthige Correction des schiefen Winkels zu
stimmen ist, läst sich gleichfalls aus erwähn
Program ersehen.

Dessen IIte Tafel enthält für jedes λ von
bis 360°, die Correctionen 1) für k = 15', l
β = 5°, β = 0°; β = 15°; β = 20
2) für k = 1° und β = 5°; β = 10°;
= 15°. β; = 20°.

Nur muß ich noch erinnern, daß mein λ
gen den ich λ genannt habe, bey Herrn P
Meister 90° — λ = ν ist; Meine Buchs
ben β, k, heisen bey ihm a, b.

Die Art des Gebrauchs seiner Tafeln ist
dessen Abhandlung §. XI. durch Beyspiele v
verschiedenen Fällen erläutert.

Herr Pr. M. vergleicht nun die Tafeln m
einander, und findet, daß ein Werkzeug m
einem parallelen Fernrohre nicht so gefährlich
gebrauchen sey, als ein anderes, dessen Fe
rohr in einer senkrechten Ebene auf und nied
beweglich ist; daß z E. eine Neigung von 4
bey dem Werkzeuge der erstern Gattung, nic
so gefährlich sey, als eine Neigung von 15' b
einem Winkelmesser der zweiten Gattung, u
so empfiehlt er wie natürlich, alle nöthige Vo

sicht

in der Horizontalstellung eines Winkel-
s, der mit einer Kippregel versehen ist.

nn man aber indessen die Bequemlichkei-
Betrachtung ziehet, die ein Winkelmes-
it einem auf und nieder beweglichen Fern-
in Absicht eines andern hat, dessen Fern-
hm parallel und unbeweglich ist, wenn
berlegt, wie viel Mühe und Zeitverlust
et, ein solches Werkzeug mit einem un-
hen Fernrohr, so zu stellen, daß dessen
, in die Fläche des auszumessenden schi-
Winkels zu liegen komme, anderer Unbe-
ichkeiten zu geschweigen, so wird man
immer ein Werkzeug mit einem auf und
beweglichen Fernrohre vorziehen.

berdem läst sich doch, vermittelst einer qu-
Wasserwaage, die Ebene des Winkelmessers
ch genau horizontal stellen, so daß man
einen Fehler von 10' in dem wagerechten
de desselben zu befürchten haben wird, und
iner solchen Neigung beläuft sich der gröste
r, den man mit einem Werkzeuge, das
iner Kippregel versehen ist, in Messung
Horizontalwinkels begehen kan, höchstens
bis 5 Minuten, wenn auch gleich das
einem Objekte gerichtete Fernrohr, mit
bene des Werkzeugs einen Winkel von 20
en machte, welches doch bey Horizontal-

ver-

vermessungen äuserst selten vorfällt, und
durch andere Hülfsmittel, (z E. durch St
die man zwischen dem Werkzeuge und dem G
jecte in eine gerade Linie setzet u. s. w.) oft v
meiden läst.

Anmerkung

§. 142. In der Aufgabe § 140, kömt nic
vor, was die Ebene ABK (Fig III) nothwen
auf die Horizontalfläche einschränkte Sie
in der That allgemeiner und läst sich so
fassen:

Es ist eine willkürliche Ebene ABK gegebe
gegen die eine andere ACI geneigt ist; E ist
Punkt in der gemeinschaftlichen Durchschnitts
nie EA beyder Ebenen, und ED, EF ein paar Lini
deren Neigungswinkel gegen die Ebene ACI
geben sind; auch CEG oder der Winkel un
dem sich ein paar durch ED, EF auf die Ebe
ACI senkrecht gesetzte Ebenen durchschneiden
bekant, man sucht daraus den Winkel BEH, u
ter dem sich ein paar Ebenen durchscheiden, d
man durch die Linien ED, EF, auf die zwe
Ebene ABH senkrecht setzet.

Es bliebe eben die Auflösung wenn z. E. AB
eine Verticalfläche wäre, die Ebene ACG n
ihr einen gewissen Winkel machte, und m
aus dem Winkel CEG und den übrigen Dat

inkel BEH, oder Bogen BH berechnen

nun diese Aufgabe so allgemein ist, so wir Gelegenheit haben sie in der Folge, verschiedenen Aufgaben mit Nutzen zu hen.

XI. Kapitel.

die Fehler, die beym Winkelmessen rühren, wenn das Fernrohr, als egel, nicht genau in einer Ebene be- ich ist, die auf des Werkzeugs Ebene senkrecht stehet.

43 Daß diese Eigenschaft eines Fernrohrs nothwendig sey, wird us dem vorhergehenden erhellen — Nun et es aber sehr oft, daß dem Fernrohre öthige Vollkommenheit fehlet, und daß ine Verrichtungen angebracht sind, ver- deren man etwa durch Stellschrauben, rfordernis einer Kippregel erhalten kan; nuß daher Mittel haben demohnerachtet em solchen Werkzeuge richtig zu messen, n Fehler in der Bewegung des Fernrohrs

aus-

ausfindig zu machen; dazu werden nun folg
Betrachtungen dienlich seyn.

Unter welchen Umständen ein Fernrohr
in einer auf der Ebene des Werkze
senkrechten Ebene auf und nieder
wege.

§. 144. Lehrs. Es sey (Fig. V.) AAA
Ebene des eingetheilten Randes eines Wi
messers; C der Mittelpunkt desselben. Cc
auf der Ebene des Werkzeugs senkrecht steh
Linie; c sey der Punkt, durch welchen die
mn gehet, um die sich die Kippregel, oder
Fernrohr Oo drehet. Die Richtung des F
rohrs Oo mache mit der Umdrehungsaxe m
nen rechten Winkel, dergestalt, daß nco =
= 90° sey. Ich behaupte nun wenn die
mn mit der Ebene des Werkzeugs parallel
das Fernrohr werde sich um diese Axe in e
Ebene auf und nieder bewegen, welche auf
Werkzeuge senkrecht stehet.

Bew. Weil Cc auf der Ebene des Werkze
senkrecht stehet, und mn mit dieser Ebene
rallel ist, so ist der Winkel mcC = 90°; a
auch mco = 90°; Also stehet mc, auf cC
gemeinschaftlich senkrecht, und ist folglich
auf die Ebene senkrecht, welche man sich d
die Richtungen co, cC gelegt, vorstellet.

Ge

ßt nun, das Fernrohr Oo, werde um
mn gedrehet, und in die Lage Ww ge-
so ist der Winkel mcw = 90°, weil
nrohr cW auf der Axe mn, in ieder La-
recht seyn wird, wenn es mit der Axe
allemahl rechtwinklicht verbunden ist.
un auch mcC = 90° und mco = 90°
wird die Richtung cw, mit den bey-
hrungen cC, co, in einer und derselben
iegen (H. H. Kästn. Geom. 45 S. Zus.)

wird also die Axe mn auf jedweder Rich-
, cw, des Fernrohrs, das heist, auf
ne in der sich das Fernrohr auf und nie-
et, senkrecht stehen. Aber auch cC lie-
der Ebene, in der sich die Richtungen
nrohrs co, cw befinden, folglich da cC
Ebene des Winkelmessers senkrecht ste-
wird auch die Ebene Cco in der sich das
r auf und nieder beweget oder die Ebe-
Kreises Awop, auf der Ebene des Werk-
ACA senkrecht stehen.

uf. Wenn das Fernrohr Oo mit der Axe
t winklicht verbunden ist, so ist eigentlich
ne Awop in der sich das Fernrohr drehet,
auf mn senkrecht.

diese Umdrehungsebene Awop stehet nur
Falle zugleich auf dem Werkzeuge ACAA

senkrecht, wenn die Umdrehungsaxe mn der Werkzeuge parallel ist, oder wenn mn, mit der Pendiculärlinie cC einen rechten Winkel macht

II. Zus. Die Ebene, wie hier Awop, in d sich das Fernrohr auf und nieder bewegt, so künftig die Ebene des Fernrohres, und ein Ebene durch mn die auf dem Werkzeuge senkrec stehet, soll der Kürze halber, die Ebene d Umdrehungsaxe heissen.

III. Zus. Wenn mn dem Werkzeuge parall ist, so stehet cC, oder der gemeinschaftliche Durc schnitt der Ebenen des Fernrohrs, und der U drehungsaxe, auf der Ebene des Werkzeugs sen recht.

Und wenn ACA die Durchschnittslinie d Ebene des Fernrohres mit der Ebene des Ra des, oder der unter dem Fernrohr befindliche Alhidadenregel, vorstellet, so stehet cC auf AC senkrecht.

§. 145. I. Wir wollen nun untersuchen, wo die bisherigen Sätze vor Veränderungen leide wenn wie in der VI Fig. die Umdrehungsaxe m dem Werkzeuge nicht parallel ist, mithin nic auf cC senkrecht stehet.

Man setze die Axe mn, mache mit der Pe pendiculärlinie cC nach n zu einen spitzen Wi

k

C, folglich nach m zu, den stumpfen Win-
m.

Weil nun, wenn das Fernrohr mit der
n rechtwinklicht verbunden ist, die Umdre-
axe mn, immer auf der Ebene des Fern-
senkrecht stehet, und folglich auch auf
emeinschaftlichen Durchschnitt der Ebenen
rnrohrs und der Umdrehungsaxe, so zie-
n in der Ebene der Umdrehungsaxe cmCL,
ie ct senkrecht auf cm, und lege durch ct
bene ctαo, senkrecht auf die Ebene cmCL,
d ctαo itzt die Ebene vorstellen, in der sich
ernrohr auf und nieder bewegt, wenn die
c dem Werkzeuge nicht parallel ist.

Es ist also klar daß itzt die Ebene ocαt
uf dem Werkzeuge senkrecht stehen wird,
e Awop im vorhergehenden §.

ndern: wenn die Umdrehungsaxe mn ge-
s Werkzeug geneigt ist, so wird auch die
des Fernrohrs gegen die Ebene des Werk-
geneigt seyn.

Da sowohl die Ebene des Randes ACL,
h die Ebene αoct auf der Ebene der Um-
gsaxe, oder auf CLmc senkrecht stehen,
auch beyder Ebenen αoct, ACL, gemein-
cher Durchschnitt αt, auf der Ebene CLmc
ht seyn. (Kästn. Geom. 48 Satz). Mit-

hin werden die Winkel αtC, αtc rechte Winke
seyn (K. Geom. 45 S.). Woraus denn weite
folgt, daß der Winkel Ctc, der Neigungswin
kel der Ebene des Fernrohrs αtco, gegen di
Ebene des Werkzeugs ACL seyn werde.

V. In dem rechtwinkl. Dreyecke Cct i
Cct + Ctc = 90° = tcm (II) = nct = Cct -
ncC; also ncC = ctC, oder die Ebene, in de
sich das Fernrohr auf und nieder bewegt, ist ge
gen die Ebene des Winkelmessers unter eben der
Winkel geneigt, welchen die Axe mn mit eine
auf das Werkzeug senkrecht gezogenen Linie c
macht.

Oder welches auf eins hinausläuft; der Nei
gungswinkel Ctc ist das Complement desjenige
Winkels zu 90° um welchen die Umdrehungs
axe mn, gegen die Ebene des Winkelmessers ge
neigt ist.

VI. Man gedenke sich durch die Lothrechte c
eine Ebene ACco, auf die Ebene CcmL senk
recht, so wird auch AC oder ihr Durchschnit
mit der Ebene des Randes auf der Ebene CcmL
senkrecht stehen.

Aber auch αt stehet auf CcmL senkrecht, also
sind AC, αt gleichlaufend (K. Geom. 46 S.)

VII

I. Wenn zwo Ebenen αoct, ACco, eine
Actα in parallelen Linien AC, αt durchschnei-
so wird auch der beyden Ebenen αoct,
, gemeinschaftlicher Durchschnitt co, mit
αt, oder überhaupt mit der Ebene ACαt
Winkelmessers parallel seyn. Auch wird co
er Ebene cuCt senkrecht stehen.

II. Umgekehrt also, wenn man das Fern-
welches sich in der schiefen Ebene αtco auf
nieder bewegt, in eine solche Lage co bringt,
er es der Ebene des Winkelmessers Acαt
lel ist, so wird es sich in einer Ebene ACco
)en, welche nicht nur auf der Ebene des
)es, sondern auch auf der Ebene der Umdre-
saxe senkrecht stehet.

III. Der beyden Ebenen ACco, αtco Nei-
swinkel ist Cct = 90° — Ctc.

Folgerung aus dem bisherigen

146. I. Wenn das Fernrohr in einer Ebe-
weglich ist, die auf dem Werkzeuge senk-
worden ist, so wird das Fernrohr, sich im-
n einer und derselben Verticalfläche befin-
man mag es hoch oder niedrig richten;
n daher das Fernrohr von einem Objecte
einem andern gerichtet wird, so wird der

Winkel, welchen die Alhidadenregel beschrieb
hat, allemahl der wahre Neigungswinkel sey
den beyde Verticalflächen, in denen die Objec
liegen, am Mittelpuncte des Werkzeugs mit ei
ander machen, das Fernrohr mag übrigens
beyden Richtungen nach den Objecten, horizo
tal seyn oder nicht; Wenn aber das Fernrohr
einer schiefen, mithin bey dem horizontalen Ste
de des Werkzeugs, nicht in einer Verticaleb
auf und nieder beweglich ist, so würde man s
sehr irren, wenn man den Bogen, welcher
Herumdrehung der Alhidadenregel auf d
Rande beschrieben worden ist, für das Ma
des Neigungswinkels zwoer Verticalebenen,
man sich durch die Objecte nach denen das Fe
rohr gerichtet wird, und den Mittelpunkt
Winkelmessers, vorstellet, annehmen wo
Der Fehler wird desto beträchtlicher seyn,
tiefer das Fernrohr bey dessen Richtungen nach
Objekten, gegen die Ebene des Werkzeugs
neigt ist. Um dieses desto mehr ins Licht
setzen, so überlege man folgendes.

II. Es sey (Fig VI) Oo die Lage des Fe
rohres, wenn es horizontal, und mit der Eb
des Werkzeugs parallel liegt (§. 145. VI. V
Eine Verticalebene durch Oo schneide die Eb
des Werkzeugs oder die Alhidadenregel in
geraden Linie ACA, die durch den Mittelpu
des Winkelmessers gehet.

un sey Ooαa die schiefe Ebene in der sich Fernrohr auf und nieder drehet, und sey dem Neigungswinkel φ = ctC = ncC 45.IV) gegen die Ebene des Werkzeugs ge-

o erhellet, wenn das Fernrohr, aus seiner ntalen Lage Oo, herausgebracht, und z. die geneigte Lage Ww gebracht wird, das- nicht beständig in der Verticalebene AOAO n werde — Das geschiehet nur, wenn es ürklich in einer Verticalfläche auf und nie- ewegt — Eine Verticalfläche, die man un durch diese gegen die Horizontalfläche gte Lage des Fernrohres Ww, oder cw ein- , wird die Ebene des Winkelmessers nicht r Linie CA, sondern in einer ganz andern Cg durchschneiden, und diese Linie Cg, wird der erstern CA, die der horizontalen Lage Fernrohres zukömt, einen gewissen Win- Cg machen, der offenbar desto grösser ist, hr das Fernrohr cw, aus der horizontalen tung co gebracht worden ist, d. h. je grös- r Winkel wco ist.

I. Eine Folge hieraus ist nun diese:

Wenn das Fernrohr, bey der Richtung nach n gewissen Objecte, das ich Q nennen will, ngs über der Linie vCx horizontal gestanden , folglich mit vCx parallel, mithin in Ab-

sicht der Linie vCx eben das gewesen wäre, w
das Fernrohr Oco in Absicht der Linie ACA w
(II), und nun die Alhidadenregel oder die Li
vCx herumgedrehet, und in die Lage ACA
bracht worden wäre, bey der das nach ein
zweiten Objecte P gerichtete Fernrohr cw ei
geneigte Lage hätte, so würde zwar xCA
Winkel seyn, um den die Alhidadenregel her
gedrehet worden, allein weil das Fernrohr ei
geneigte Lage hat, so wird eine Verticaleb
durch cw, die Alhidadenregel nicht, in der
nie ACA sondern, in der Linie Cg durchschneid
und xCg würde der wahre Winkel seyn, den
beyden Verticalebenen durch die Objecte Q,
am Mittelpunkte des Werkzeugs mit einan
machen. Allein dieser Winkel xCg ist nicht d
Winkel xCA gleich, um welchen die Regel
drehet worden; mithin, wenn man den au
Rande durchlaufenen Bogen Ax, für das Ma
des wahren Horizontalwinkels gCx annehm
wolte, so würde man offenbar einen Fehler
gehen, der dem kleinen Bogen Ag, oder d
zugehörigen Winkel ACg gleich wäre.

IV. Um die Grösse dieses kleinen Wink
ACg zu bestimmen, so überlege man, daß A
der Neigungswinkel der beyden Verticaleben
ACco, gCcw oder der beyden grösten Kreise Ac
gwp ist.

Man beschreibe nun mit dem Halbmesser
co, in der Ebene ccoct, in der sich das
hr drehet, den Kreisbogen owcc, so erhält
n sphärisches Dreyeck opw, darinnen ist
ogen op = 90°, als Maas des rechten
ls ocp.

erhellet daraus, weil die beyden Verti-
len AopC, gwpC sich in der Verticallinie
neiden müssen, und die Horizontallinie co
er Verticalen pc einen rechten Winkel
n muß.

ner ist p des Horizontalkreises AgI. A Pol,
) der sphärische Winkel opg der Neigungs-
, der beyden Verticalebenen Aop, gwp;
pg = A(g (IV) welchen Winkel ACg
= x nennen will.

r sphärische Winkel pow ist = 180° —
Aber woA ist die Neigung der schiefen
ccoct, gegen die Verticale AoLc. Folg-
ich woA = tcC = 90° — ctC (§ 145.
Macht also die Axe mn nach n zu den
ngswinkel = ω mit dem Werkzeuge, so
= 90° — ω; Also woA = tcC = ω
h pow = 180° — ω.

an gedenke sich in der Verticalebene gwCc,
c eine Horizontallinie ci gezogen, so ist der
el icW die Neigung des Fernrohrs unter

der Horizontallinie, diesen Winkel will ich = nennen

Also ist der Winkel wcp = icp + wci = + ψ = dem Bogen piw.

Um nun den Winkel opw oder ACg zu den, so wollen wir das sphärische Dreyeck o auflösen.

Man lasse in (Trig. S. LIII. 1) die dorti Grössen A, B, b, c, hier in der Figur die Grö opw, poW, pw, po bedeuten, so giebt die tige Gleichung, folgende

$$\text{tang pow} = \frac{\text{sin opw tang pw}}{\text{sin po} - \text{tang pw cos po cos o}}$$

Nun ist aber tang pow = tang (180° —

= — tang ω

tang pw = tang (90° +

= — cot ψ

sin opw = sin x

sin po = sin 90° = 1; cos po =

Diese Werthe also substituirt, geben

tang ω = sin x cot ψ also

$$\text{sin x} = \frac{\text{tang } \omega}{\text{cot } \psi} = \text{tang } \omega \text{ tang } \psi$$

Weil aber nun gewis die Axe mn nur f mer einen sehr kleinen Winkel ω mit der Ebe des Werkzeugs machen wird, wenn anders d

We

ug nicht gar zu fehlerhaft seyn soll, und
n auch der Winkel opw = ACg = x
nur klein seyn wird, so kan man ohne
ben Fehler sin x = x; und tang ω = ω

$$x = \omega \text{ tang } \psi$$

chergestalt findet man also aus den gege-
Grössen ω, ψ, den Fehler, welchen man
der geneigten Lage der Axe, in dem Fal-
) Ausmessung eines Horizontalwinkels zu
ten hat, wenn nach dem ersten Objecte Q
rnrohr über der Linie cx horizontal gerichtet
n, nach dem zweiten Objecte P aber in der
ng cw um den Winkel ψ von der Horizontal-
rabgeneigt gewesen wäre. Dann nemlich
rt der Winkel ACx = α, welchen die Al-
nregel beschrieben hat, die Correction
= x = ω teng ψ, um den wahren Winkel
= α + x = α + ω. tang ψ zu erhalten,
n beyde Verticalebenen, durch die Obje-
, P, am Mittelpunkte des Winkelmessers
nander machen.

Es ist hier angenommen worden, daß
e cn mit cC (Fig. VI) nach n zu, den
Winkel ncC macht. Einem Beobachter
r bey O durchs Fernrohr Oo sähe, würde
urchschnitt der Axe cn mit der Ebene des

Werk-

Werkzeugs, rechter Hand der Linie ACA, auch rechter Hand des Perpendikels Cc falle

Es ist klar, wenn die Axe nach der entge gesetzten Richtung cm gegen die Ebene des W kelmessers geneigt wäre, daß alsdenn die cm die Ebene des Werkzeugs in einem Pu schneiden würde, welcher in Absicht des B achters bey O linker Hand des Perpendikels läge. Man wird also für den letzten Fall, Werth von ω in obiger Formel (V) negativ n men müssen. Daher wäre in solchen Falle a die Correction des Winkels α, welchen die hidadenregel beschrieben hat, negativ, und wahre Winkel, den die Objecte am Mi punkte des Werkzeugs machen $= \alpha$ ω. tang ψ.

VII. Ferner setzt die bisherige Rechnung Fig. VI. zum voraus, daß das Fernrohr cw, der Richtung nach dem zweiten Objecte P n w zu geneigt ist, und folglich sich unterhalb Horizontallinie ci befinde; Wäre aber nach d zweiten Objecte das Fernrohr über der Horiz tallinie ci erhöhet, so müste man in unse Formeln, auch den Winkel ψ negativ setze dann wäre auch tang ψ negativ, folglich den Fall (V) der wahre Winkel $= \alpha - \omega$ tang und für den Fall (VI) derselbe $= \alpha$ ω tang ψ.

VI

Ich will nun die bisherige Vorausse-
ß das Fernrohr, bey der Richtung nach
n Objecte Q horizontal oder parallel über
adenregel vx gestanden habe, ändern,
annehmen daß es bey der Richtung
ersten Objecte Q, ebenfalls unter der
allinie um den Winkel ψ^1, geneigt ge-
re; Alsdann würde eine Verticalebene
das Object Q, nach dem das Fern-
chtet ist, und durch den Mittelpunkt
kelmessers gehet die Ebene des Randes
der Linie Cx, sondern in einer andern
durchschneiden, dergestalt, daß also
Linie Cy, in Absicht der Linie Cx eben
, was die Linie Cg in Absicht der CA
und der kleine Winkel xCy wäre $=$
ψ^1; Nun würde der wahre Winkel der
Verticalflächen durch die Objecte, sam
uncte des Werkzeugs $= yCg$; der aber,
die Alhidadenregel beschrieben hat $=$
α.

$yCA = \alpha - \omega \text{ tang } \psi^1$, und daher
oder $yCA + ACg$ oder
$= \alpha - \omega \text{ tang } \psi^1 + \omega \text{ tang } \psi$ Mithin
$= \alpha + \omega(\text{tang } \psi - \text{tang } \psi^1)$

folglich wäre der Fehler, den man in
mung des verlangten Winkels yCg bege-
rde, wenn man den von der Alhidaden-
oder dem Index des Vornier, durchlau-

fen

fen Bogen xyA für deſſelben Maaß annehm
wolte, der Gröſſe ω (tang ψ — tang ψ^1) gle

IX. Wenn $\psi^1 = \psi$, alſo in beyden R
tungen des Fernrohrs nach den Objecten,
Fernrohr gleichviel über oder unter der Horiz
tallinie geneigt wäre, ſo würde der Fe
ω (tang ψ — tang ψ^1) = o und der wahre W
kel yCg, dem xCA, den das Werkzeug
giebt, gleich.

Soll alſo mit einem Winkelmeſſer, de
Fernrohr nicht in einer Verticalebene auf
nieder beweglich iſt, bey Ausmeſſung eines W
kels kein Fehler entſtehen, ſo muß das Fe
rohr bey deſſen Richtung nach den Objec
gleichviel über oder unter der Horizontallinie
neigt ſeyn.

X. Um das bisherige mit einem Zahlenexe
pel zu erläutern, ſo will ich ſetzen die Neigu
der Axe, um die ſich das Fernrohr drehet,
trage $20^1 = \omega$. Bey der Richtung des Fe
rohrs nach dem erſten Objecte ſey deſſen Neigu
unter der Horizontallinie oder $\psi^1 = 12°$, n
dem zweiten $\psi = 18°$; der von dem Ini
beſchriebene Bogen $\alpha = 80°$, der wahre W
kel beyder Objecte oder yCg = A, ſo iſt

$$A = 80° + 20^1 \text{ (tang } 18° - \text{tang } 12°)$$
$$= 80° + 20^1 \text{ (0,3249} - 0,2125)$$
$$= 80° + 20^1 . 0,1124 = 80°. 2^1. 16'$$

B

$= -12^{\circ}$ wäre aber
$= 80^{\circ} + 20^{1}$ (tang $18^{\circ} + 12^{\circ}$) oder
öriger Rechnung
$= 80^{\circ}. 10^{1}. 45''$

us erhellet also, daß der Fehler sehr be-
werden kan, wenn gleich die Neigung
rehungsaxe nur 20^{1} betrüge, mithin
hs blosse Auge schwerlich würde wahrs
lassen.

Wenn man überhaupt den Fehler
$= \omega$ (tang ψ — tang ψ^{1})
n will, so muß man die Grössen ω, ψ, ψ^{1}
nnt annehmen, oder Mittel haben, bey
orgegebenen Werkzeuge dieselben aus-
machen. Wie man die Neigung der
estimmen und durch Beobachtungen fin-
e, zeige ich nachher. Die Werthe von
, oder die Neigungen des Fernrohrs ge-
Horizontalfläche zu bestimmen, sehe ich
er Mittel, als daß man entweder wis-
, wie viel die Objecte, nach denen das
r gerichtet ist, über oder unter der Hori-
ene des Werkzeugs liegen, oder es müste
n Mechanico eine Einrichtung getroffen
zugleich den Winkel zu messen, um den
nrohr bey der jedesmahligen Richtung
, über oder unter der Horizontallinie ge-
ire.

Da aber eine solche Verrichtung, besond
kleine Werkzeuge, deren man sich doch nur
wöhnlich beym Feldmessen bedient, nur zus
mengesezter machen würde, und übrigens a
keine sehr scharfe Bestimmung der Winkel
ψ' nöthig ist, so habe ich mich immer folg
des Mittels bedient, die Neigung des Fernro
unter der Horizontallinie zu bestimmen.

Es sey Fig VII. wieder C der Punkt, um
sich in dem Gewinde das Fernrohr auf und
der bewegt, oder der Mittelpunkt des Gewind
cC die Weite desselben von der horizontalen E
ne des Werkzeugs. Es wird nicht schwer
cC nach einem gewissen Maasstabe als bek
anzunehmen. Ich will also cC = a nennen.

w W sey das geneigte Fernrohr, und w
äuserste Ende desselben, wt ein Loth auf die E
ne des Werkzeugs; wi horizontal, und cr se
recht auf Ww Ich kan auch die beständig
Grössen cw, cr als bekant annehmen, wo ich
= b nenne, des Winkels cwr Sinus ist

$\frac{cr}{cw}$ also der Winkel cwr eine beständige Grö
= α

Des Fernrohrs Ww Neigung gegen die H
rizontallinie wi ist der Winkel ψ = Wwi
α + cwi

1

cwi zu finden, messe man den veränder-
Abstand wt, welches in jedem Falle nicht
seyn wird, und nenne wt = z.

ist in dem rechtwinklichten Dreyecke cwi,

$Cc - wt = a - z$ und $\sin cwi = \frac{ci}{cw}$

$\frac{-z}{-}$ Also ist durch Messung des Abstandes

h der Winkel cwi den ich φ nennen will

giebt demnach die Neigung des Fernrohrs
die Horizontallinie, oder den Winkel ψ
φ. Wenn $wt > Cc$ oder $z > a$, so ist des
s cwi oder φ Sinus negativ, folglich
r Winkel φ negativ; In diesem Falle ist
h $\psi = \alpha - \varphi$. Auf solche Art kan man
s den unveränderlichen Grössen α, cw, a,
n veränderlichen Abstand z, in jedem Falle
ht die Winkel ψ, ψ^1 finden, und obs
n Messung der erwähnten Grössen α, cw, a,
leine Fehler enthalten seyn können, so wird
nnoch ψ mit hier zureichender Genauigkeit

diese Art erspart man sich eine Vorrich-
n Winkel ψ unmittelbar zu messen, und
n die beständigen Grössen α, cw, a ein
mahl als bekant ansehen kan, so hat man
er Neigung des Fernrohrs blos den ver-

änderlichen Abstand z zu messen, welches ohne
geringste Weitläuftigkeit jedesmahl gesche
kan. Den gemessenen Abstand wt = z kan man d
allemahl zugleich mit in diejenige Columne sch
ben, in welche die Abmessungen zu stehen k
men, die der Bestimmung desjenigen Objek
wohin das Fernrohr Ww gerichtet ist, zug
ren (§. 133. IV)

XII. Für $z = o$, oder wenn das Fern
ganz bis auf die Ebene des Winkelmessers
neigt ist, wird $\sin \varphi = \frac{a}{cw}$; diesen Wi
will ich γ nennen, so ist $\gamma + \alpha$ der gröste W
kel um den man das Fernrohr neigen kan.
wöhnlich pflegt man ihn nicht grösser als e
20 bis 25 Grad zu nehmen.

Zu unrersuchen ob das Fernrohr genau einer auf der Alhidadenregel senkrechte Ebene beweglich sey.

§. 147. Aufl. I. Man bringe die Ebene
Winkelmessers Fig VI mit aller möglichen A
sicht, vermittelst einer sehr guten Wasserw
in eine horizontale Stellung.

II Nun lasse man in einiger Entfernung
dem Werkzeuge an einem Faden MR ein
Herabhängen, welches aber zu gegenwärtiger

ꝛr ruhig hängen muß; Daher man sich
nit Wasser angefüllten Gefässes bedienen
in welches das Loth hängt.

Noch besser ist es, wenn man auf einer
ten Wand, genau eine Verticallinie ver-
t.

Man richte nun die Axe des Fernrohres,
en Durchschnitt der beyden Kreuzlinien
ennpunkte desselben, ganz genau nach der
ten Verticallinie MR, wobey denn das
ohr, eine mit der Ebene des Werkzeugs
ele, folglich horizontale Lage co habe, die
ar leicht durch Versuche, oder durch an-
Mittel erhalten kan.

Nun ist klar, wenn das Fernrohr in ei-
Verticalebene ocAC auf und nieder beweg-
st, so wird der Durchschnitt der beyden
zlinien im Brennpunkte beständig die er-
te Verticallinie MR decken, und selbige nie
fen, man mag das Fernrohr, unter oder
die Horizontallinie neigen, wie man will.

I. Man bringe also das Fernrohr, aus sei-
orizontalen Lage Oo, bey der es genau nach
gerichtet ist, in eine geneigte Lage. Ver-
nun der Durchschnitt der beyden Kreuzli-
, oder die Axe des Fernrohrs, die erwähnte
icallinie MR, so ist zuverläßig das Fern-

rohr nicht in einer Verticalebene, sondern in
ner schiefen coαt auf und nieder beweglich, m
hin wird die Umdrehungsaxe mn einen gewiss
Winkel $= \omega$ mit der Ebene des Werkzeu
machen (§ 146 V.)

ω zu finden.

§ 148. I. Es bleibe alle Zurüstung wie i
vorhergehenden §. und die Horizontalaxe Oo d
Fernrohres sey genau nach der Verticallinie M
gerichtet worden — Man neige nun das Fer
rohr aus der Lage Oo in die Ww, so wird, wen
das Fernrohr nicht in einer Verticalebene auf u
nieder beweglich ist, die Axe Ww in dieser genei
ten Lage keinesweges die Verticallinie MR me
decken, sondern von ihr um einen gewissen A
stand entfernt seyn.

Man stelle sich durch cw eine Verticaleben
Ccwg vor, die das Werkzeug in Cg schneid
so wird anitzt die Verticalebene Ccwg, in d
sich das geneigte Fernrohr befindet, von der Ve
ticalebene ACco in der es sich bey dem horizon
talen Stande befand, um den kleinen Wink
$ACg = x = \omega \tang \psi$ (§. 146. V) abweichen
Diesen kleinen Winkel x zu finden, lasse ma
das Fernrohr in seiner Neigung cw, und wend
durch Hülfe der Micrometerschraube, die Alh
dadenregel, sanft herum, bis izt die geneig
Axe des Fernrohrs cw, den Verticalfaden M
decke

mithin die Verticalebene Ccwg' in die CA gekommen ist; so wird man die Alhi-egel genau um einen Winkel ACg = x et haben, und diesen Winkel, werden ndrehungen der Micrometerschraube be-n.

Nachdem auf diese Art durch Beobach-r Winkel x gefunden worden, so bestim-n nach (§. 146 IX) auch die Neigung des hrs unter der Horizontallinie oder den ψ.

Weil nun x, ψ solchergestalt bekante sind, so findet man umgekehrt aus der ng $x = \omega \tang \psi$, den Werth von ω

$\frac{}{\psi} = x \cot \psi$ also die Neigung der ungsaxe mn gegen die Ebene des Werk-

Bey einem Werkzeuge, das ich besitze, chfalls das Fernrohr nicht in der gehöri-ene auf und nieder beweglich ist, fande einem angestellten Versuche x = 8'30", Fernrohr war so geneigt, daß (§. 146. Theilchen eines verjüngten Maasstabes ; a = 175. b = 325 war. Der Win-ar aber wegen einer besondern Vorrich-r Kippregel = o. Dieß gab mir also

$$\sin\varphi = \frac{a - z}{b} = \frac{90}{325} = 0{,}2769.$$ alſ

$= 16^\circ\ 4'$. Weil nun $x = 8^\circ\ 30'' = 51$
ſo iſt

$$\begin{aligned} lx &= 2{,}70757 \\ l\cot\psi &= 0{,}54059 \\ \hline \log\omega &= 3{,}24816 \end{aligned}$$

alſo $\omega = 1770'' = 29'.\ 30''$

So betrug alſo bey dieſem Werkzeuge,
Neigung der Axe, um die ſich das Fernrohr
het, beynahe einen halben Grad; Ich habe n
her die Verſuche bey andern Neigungen
Fernrohrs wiederhohlt, und fand für ω folge
Werthe.

$\omega = 29'.\ 30''$,
$\omega = 28.\ 0$
$\omega = 27.\ 20$
$\omega = 29.\ 14$
$\omega = 28.\ 12$
$\omega = 29.\ 10$

das Mittel $\omega = 28'.\ 34''$

Die Unterſchiede in den gefundenen Wert
für ω rühren bloß von den kleinen Fehlern her,
bey den Abmeſſungen, die zur Beſtimmung
ω nöthig waren, begangen worden ſind.

Uebrigens habe ich hier noch zu erinne
daß dieſer Werth von ω negativ iſt, weil,
u

er Horizontallinie geneigte Axe des Fern-
in Absicht des Beobachters bey O, nach
Punkte gerichtet war, der nicht linker des
alfadens MR, sondern rechter Hand des-
lag, wo also die Verticalebene Ccwg,
ie hier in der Figur angenommen ist, lin-
nd der ACco, sondern rechter Hand der-
liegen müste.

Anmerkung

49. Das bisherige wird also denen, die
erkzeug besitzen, wo das Fernrohr nicht in
Verticalebene auf und nieder beweglich ist,
, wie sie dennoch mit einem solchen Win-
ser nach der gehörigen Correction, einen
el genau messen können; Es wird gut seyn,
sie sich für jede Neigung des Fernrohrs,
ür jedes ψ, ein für allemahl den daraus
ingenden Fehler berechnen, uud davon eine
le verfertigen, aus der sie sodann nach (§.
VIII) sogleich die nöthige Correction her-
hmen können.

t aber von dem Mechanico an dem Werk-
eine solche Vorrichtung angebracht, wo-
sich etwa durch Stellschrauben, die Axe
ie sich das Fernrohr drehet, genau der
e des Werkzeugs parallel stellen läst, so kan
der bisherigen Rechnungen überhoben seyn;
n man nemlich nach §. 147 auch einen sol-

chen Fehler des Werkzeugs gefunden hat, kan man vermittelst der Stellschrauben, die A um die sich das Fernrohr drehet, so lange v bessern, bis man in der Bewegung des Fe rohrs keinen Fehler mehr entdecket.

Eine Vorrichtung durch Stellschraub die Umdrehungsaxe des Fernrohres de Ebene des Werkzeugs parallel zu stellen.

§ 150. Es lassen sich dergleichen Mittel se viele angeben; Eine Vorrichtung aber, wodur ich glaube diese Absicht bey dem § 99. angeg benen Winkelmesser auf eine leichte Art zu halten wäre etwa folgende. Fig. VIII bedeu TZ das Stük Meßing welches mit denselben Buc staben auf der LXVI Figur der V Kupferplat des 1sten Theils bezeichnet ist, und wird dur 4 Schrauben, auf die Alhidadenregel befestig (§ 99. 8) Viz ist die Vorrichtung an der si das Zirkelgewinde V befindet, um welches si das Fernrohr auf und nieder drehet. Die Vorrichtung endigt sich in eine runde Platte t deren untere Fläche tμz convex ist, oder ein Kugelfläche vorstellet; Auf dem Stük Messin TZ ist nun eine kugelförmige oder koncave Ver tiefung m gedrehet, in welche genau die konvex Fläche tμz passet, welches man durch Einschmi geln gar leicht erhalten kan. Die Einrichtun

mu

er so getroffen werden, daß, wenn tμz
Vertiefung in gesetzt worden, die obere
der Platte tz, etwa noch um $\frac{1}{3}$ Linie,
r Ebene des Stücks Messing TZ her-
t, ohngefähr wie es im Durchschnitte
11 *) zu sehen ist.

sind nahe an dem Umfange der Vertie-
, 4 Schraubenmütter, a, a, α, α, an-
t, in die 4 stählerne Schrauben wie
hr bey n zu sehen ist, gehören, die mit
breiten Köpfen versehen sind, damit
ie Vorrichtung tμz in die Vertiefung in
wird, alsdann diese Schraubenköpfe,
hr mit ihrer Hälfte über die Platte tμz
gehen, und wenn sie angezogen werden,
ren Druk auf dieselbe, die Platte tμz un-
t erhalten, wenn man will: Zugleich
aber diese Schrauben auch dazu dienen,
tte tz, mithin die ganze Vorrichtung tVz,
sich das Fernrohr drehet, in der Vertie-
etwas zu verschieben, mithin zu machen,
z in eine solche Stellung komme, bey der
um die sich in dem Zinkelgewinde das
hr drehet, der Ebene des Werkzeugs
werde Denn wenn man z. E. die Schrau-
z, etwas nachlässet, und hingegen die a, a,
t, so werden letztere durch ihren Druk
in der Vertiefung in befindlichen Platte
e Vorrichtung tVz, nach der Seite zu

neigen; und verschieben, nach welcher der Dr
geschieht; und da, durch das anziehen der Schra
ben αα, und lösung der aa, die Vorrichtun
tVz nach der entgegengesetzten Seite genei
werden kan, so erhellet, daß vermittelst die
Schrauben, die Vorrichtung tVz. die sich d
durch in der Vertiefung m etwas verschiebt,
eine solche Stellung gebracht werden kan, d
die Axe um die sich das Fernrohr XX drehet d
Ebene des Werkzeugs parallel werde. Hat
nun einmahl ihre gehörige Stellung, so werd
die 4 Schrauben a, a, αα. nachdem sie sor
fältig angezogen worden, die Vorrichtung t
unverrückt erhalten.

Anmerkung

Die Schlüsse, worauf sich die Formeln (§. 146.
gründen, setzen zum voraus, daß die Umdr
hunasaxe mn in Fig VI mit dem Fernrohre rec
winklicht verbunden ist, und folglich die Kipp
gel keinen andern Fehler habe, als den, d
die Axe mn, der Ebene des Werkzeugs nic
parallel ist.

Wenn man aber auserdem noch annimm
daß das Fernrohr nicht mit der Axe mn rec
winklicht verbunden ist, sondern einen Wink
mit der Axe macht, der von einem Rechten u
etwas geringes unterschieden ist, so werden a
dies

woken Unvollkommenheit der Klippregel,
ch Fehler bey Messung der Winkel ent-
weil alsdann das Fernrohr, beym Auf-
ederbewegen, nicht wie bisher eine Ebene,
eine kegelförmige Fläche beschreibt.

in der Fehler, der aus dieser Ursache
Winkelmessen zu befürchten ist, ist so un-
tlich, daß ich es nicht der Mühe werth
en habe, ihn mit in Erwegung zu ziehen —
es läst sich ohne merklichen Irrthum an-
n, daß das Fernrohr, so weit als man
m Feldmessen auf und nieder bewegt, eine
mmene Ebene beschreibt, ob es gleich nicht
genau mit der Umdreh. Axe rechtwinklicht
den ist. Wenn auch das Fernrohr, mit
mdreh. Axe mn, einen Winkel von 89
en machte, also um 1 °. von der senkrechten
ndung abwiche, (welches doch ein Mecha-
gar leicht wird vermeiden können) so ha-
gefunden, daß in den seltensten Fällen in
nessung der Winkel ein Fehler von $1\frac{1}{2}$ Mi-
daraus zu befürchten sey. Weit gefähr-
ist die bisher betrachtete Neigung der Um-
ngsaxe mn.

XII.

XII. Kapitel.

Winkel, deren Ebene sich in einer Ver calfläche befinden, vermittelst des Wink messers, auf dem Felde auszu- messen.

§. 151. Die im ersten Theile gegebenen V schriften (§ 128. u. f.) die Gr eines Winkels zu erfahren, beziehen sich n auf solche Winkel, deren Schenkel horizon sind, oder wenigstens auf die Horizontalflä projicirt werden.

Nun kömt es aber in der practischen Geom trie auch oft vor, daß man Höhen oder T fen messen muß. In diesem Falle stellet m sich (Fig IX) durchs Auge O und das Object eine Verticalebene vor, gedenket sich in derselb eine Horizontallinie Or durchs Auge gezogen und von dem Objecte P auf dieselbe eine perpen diculäre Pa herabgefället; dann heist Pa die Hö he des Objects über der Horizontallinie durch Auge, und wenn das Object p unter der Lin Or läge, so hiesse ap die Tiefe des Objects Um diese Höhe Pa, oder Tiefe pa zu bestimmen so muß außer andern gegebenen Stücken, auch

nkel POa, oder poa bekant seyn; davon
POa, der Elevationswinkel heist,
s Object über der Horizontallinie liegt,
ere pao aber der Depressionswinkel,
s Object p sich unter der Horizontalaxe
det.

nd also hier POa, poa, ein paar Win-
e sich in einer Verticalebene befinden,
n siehet leicht, daß wenn diese Winkel
essen werden sollen, folgende Bedingun-
Erfüllung gebracht werden müssen. 1)
ngetheilten Rand, oder die Ebene des
messers genau in die Verticalebene POa
hten. 2) Die Axe des Fernrohrs, wel-
in der Figur durch die Linie l.Ol be-
ist, genau in die horizontale Richtung
bringen.

n diese beyden Bedingungen erfüllt sind,
et, daß man um die Grösse des Eleva-
nkels POa zu erfahren, nur nöthig ha-
Fernrohr aus der horizontalen Richtung
die Richtung On nach dem Objecte P zu
, und dann den auf dem verticalgestell-
nde des Winkelmessers beschriebenen Bo-
, oder Lm in Graden und Minuten zu
nen;

wichtigste Erforderniß hiebey ist immer
das Fernrohr so genau als möglich in

die

die horizontale Stellung zu bringen; Und hierzu die Kenntnis einer Libelle erfordert w so muß ich erstlich hievon einige Begriffe be bringen suchen.

Verbindung der Libelle mit dem Fern rohre.

§. 152. Wenn man überlegt, daß wir schon im vorhergehenden, eines mit Wasser gefüllten Gefässes bedienet haben, den hori talen Stand einer Ebene zu erfahren, so n man auch gar leicht darauf verfallen, sich e ähnlichen Einrichtung zu bedienen, um eine gegebene Linie, z. E. die Axe eines Fernro in eine horizontale Lage zu bringen.

Die Art nun wie eine Libelle, (d. h. eine che Vorrichtung, wodurch man vermittelst Oberfläche des Wassers den horizontalen Sta einer Linie erfahren kan) mit dem Fernrohre dieser Absicht verbunden werden müste, läst im wesentlichen aus der X Figur ersehen.

I. Man gedenke sich in dieser Figur das Fe rohr, so, wie es bey dem verticalen Stande nes Winkelmessers erscheinen würde. OO also die um den Mittelpunkt des Winkelm sers bewegliche Alhidadenregel, und H, H ein paar Hülsen durch Schrauben auf sie be

stig

ergestalt, daß das durchgesteckte Fern-
X der Ebene des Werkzeugs parallel sey(*)
, sind Schrauben, die man nach Gefal-
ehen, und nachlassen kan;

Um die Axe des Fernrohrs genau horizon-
en zu können, so sey P eine gläserne, et-
Zoll lange cylindrische Röhre, die an bey-
den genau verschlossen, und mit Wein-
ngefüllt wird, so aber, daß eine Luftbla-
r vielmehr ein leerer Raum $\alpha\beta$. darinn
, wodurch die horizontale Lage, oder die
äche des Wassers abgebildet wird. Ich
n erstlich zeigen, wie diese Libelle P ge-
mit dem Fernrohre verbunden seyn muß,
n die Beschreibung nicht zu unterbrechen,
thigen Erfordernisse einer guten Libelle
hernach nachfolgen lassen.

III.

Ich habe schon im vorhergehenden (§. 100)
innert, daß bey Höhenmessungen, die Kipp-
gel nicht mit Vortheil zu gebrauchen sey, son-
rn daß man in solchen Falle die Vorrichtung
KZ (I Theil. Tab. V. Fig. LXVI) von der
lhidadenregel weanimmt, und statt ihrer ein
aar Hülsen, auf die Alhidadenregel befestigt,
amit das durchgesteckte Fernrohr, der Ebene
es Randes parallel werde und nicht, wie
ey der Kippregel, auf und nieder beweglich
y:

III. N, Q sind ein paar meßingene Hülse die die cylindrische Röhre des Fernrohres gen umfassen, und auch durch ein paar Schraub n, n, nach Gefallen festgehalten werd können.

IV. An der Hülse Q. ist eine Vorrichtu angelöthet, die bey c ein Zirkelgewinde hat, wo an sich eine meßingene Hülse K befindet, wodu das eine Ende der Libelle gesteckt ist.

V. Die Libelle um das Zirkelgewinde auf u nieder zu bewegen, dienet die Stellschraube K welche völlig von eben der Beschaffenheit und Z sammensetzung ist, wie die (§. 100.) beschriebe Micrometerschraube, daher ich weiter keine E läuterungen beyzufügen habe, und auch alles a der Zeichnung deutlich zu ersehen ist — D meßingene Hülse M, in die das andere En der Libelle verkittet ist, trägt einen Ansatz v welcher für die Stellschraube Kr die Mutter a giebt — an dem Ansatz v, befindet sich aber w aus Fig. XI deutlicher zu ersehen ist, ein etwa dünneres prismatisches Stück s, welches be Wendung der Stellschraube, sich in einer Schlitze auf und niederschiebt, welcher in de aufrechtstehenden Wand, des auf die Hülse M gelötheten Kniees dpq, eingeschnitten ist, wi aus Fig XII deutlicher erhellet. Die Absicht da von ist, daß bey Umwendung der Stellschraube nich

e geringste Wankung zu befürchten sey,
Libelle sich desto genauer in einer einzigen
uf und nieder treiben lasse.

Dis ist die ganze Vorrichtung, wodurch
le gehörig mit dem Fernrohre verbunden
Wenn man die Libelle von dem Fernrohre
en will, so darf man nur die Röhre V,
ich das Ocularglas des Fernrohrs befin-
nehmen, und dann das Fernrohr nach
chtung XXO durch die Hülsen Q, N,
; Hierauf werden sich gar leicht die bey-
ülsen N, Q, woran sich die Vorrichtung
Libelle befindet, von der Röhre des Fern-
nach der Richtung NXQ abschieben

Uebrigens habe ich noch zu erinnern,
r beym Gebrauche, den wir in der Folge
r Libelle machen, immer voraus setzen,
Axe der Libelle, so genau als möglich
t der Axe des Fernrohrs, in einer und
n Ebene befinde; Eine Voraussetzung
von dem Mechanico gar leicht erhalten
kan;

thige Eigenschaften einer guten Libelle.

53. I. Die innere Höhlung der Glasröh-
uß so genau als möglich cylindrisch seyn,

und daher mit besonderer Vorsicht ausgeschliffe
und poliret werden; Eine Bedingung welche zw
so gar leicht nicht zu erfüllen stehet, aber v
einem geschickten Mechanico doch immer erh
ten werden kan. Glasröhren so wie sie a
der Hütte kommen, werden selten die erwähn
Eigenschaft besitzen, indem dieselben, bald ei
kegelförmige Höhlung, bald andere Ungleichh
ten und Beulen haben; daher ist das Ausschl
fen vermittelst eines metallenen cylindrischen K
bens schlechterdings nothwendig, wenn die
belle gut seyn soll. Herr Mechanicus Brand
(Siehe Picards Abh vom Wasserwäg
übers durch Hr. Lambert pag 295) hat M
tel gefunden, Glasröhren durchs Ausschleifen
gerade zu machen, daß sie auf die geringste N
gung einen Ausschlag geben Man kan zw
konische Röhren, wenn sie nur rein von Beul
sind, auch zu Libellen gebrauchen, allein ih
Rectification erfordert besondere Kunstgriffe, d
man sehr wohl in Hrn Prof Meisters Abhan
lung von Libellen *Comment. Soc. Reg. Goettin*
T VII ausgeführt, nachlesen kan; das nöthige ab
hievon beyzubringen, ist hier wenigstens der O
nicht; die Libelle, von der ich also in diesem K
pitel rede, wird als vollkommen cylindrisch a
genommen, oder ihre Abweichung von der cyli
drischen Gestalt wenigstens so geringe gesetzt, do
man keinen merklichen Fehler zu befürchten ha

Die Länge der Glasröhre muß wenigstens
6 Zoll, betragen, wenn sie die gehörige
ndlichkeit haben soll; indessen kömt es
ächlich auch

Auf die Länge $\alpha\beta$ der Luftblaße an, die
ißig gegen die ganze Länge der Röhre ein
ntes Verhältnis hat, wenn die Libelle ih-
hörige Empfindlichkeit haben soll. Ist
) die Blase allzuklein, so hängt sie sich
leicht an, und verursacht eine Trägheit
belle. Ist aber die Blase gar zu groß,
d die Libelle zu empfindlich, und es hält
, sie in den gehörigen Stand zu bringen.

Erfahrung hat mich gelehrt, daß, wenn
öhre 5 bis 6 Zoll lang ist, die schicklichste
der Luftblase etwa $\frac{3}{4}$ oder 1 Zoll betragen
und wenn bey diesen Umständen die
gut ausgeschliffen ist, so muß dieselbe auf
höhung oder Vertiefung von 10 Secunden
äßig einen Ausschlag geben, welches eine
nigkeit ist, die man bey gewöhnlichen Hö-
ssungen in der practischen Geometrie kaum
öthen hat.

Der Weingeist, womit die Röhre ge-
wird, muß sehr rein und gut, auch nicht
t seyn, und in Folge der Zeit keinen Satz
Unreinigkeiten in der Röhre zurücklassen.

Auch darf sich, ehe die Röhre gefüllt wird, ke
ne Fettigkeit, oder Staub u. s. w. in der i
nern Höhlung angesetzt haben.

Wie man eine Libelle mit dem Fernroh
parallel machen könne.

§. 154. Grundsatz I. Wenn die Röhre der
belle cylindrisch ist, und beyde Axen, sowo
der Libelle als des Fernrohrs, sich in einer g
meinschaftlichen Verticalebene befinden, und m
ferner annimmt, daß man die Axe des Fernro
res horizontal gestellet habe, so erhellet, we
unter solchen Umständen die Luftblase $\alpha\beta$, in d
Mitte der Libelle P ruhig stehen bleibt, auch d
Libelle horizontal, mithin die Axe des Fernrohr
mit der Wasserfläche $\alpha\beta$, oder mit den Seite
linien ef, $\varepsilon\varphi$, der Libelle, parallel seyn werd

Grundsatz II. Und wenn man die Libelle
dem horizontalgestellten Fernrohre in unverrückt
Lage läßt, das Fernrohr aber innerhalb der Hü
sen H, H, um seine Axe drehet, bis die Libe
unterhalb des Fernrohres in die Lage $\varepsilon'\varphi'e$
kömt, so wird sich die Luftblase $\alpha\beta$, noch in d
Mitte zeigen, wenn nur sonst die Axe des Fer
rohres, oder die Alhidadenregel OO keine Ve
rückung gelitten hat.

II

Diese beyden Sätze sind so klar, daß
es Beweises bedürfen, und geben ein siche-
ttel ab, zu untersuchen, ob die Wasserflä-
, oder die Seitenlinien ef, εΦ, mithin
e Axe der Libelle, der Axe des Fernrohres
l ist oder nicht.

Ist nemlich die Luftblase αβ bey der La-
Libelle ef εΦ, zwar in der Mitte, aber
lsdann, wenn durch Umwendung des Fern-
die Libelle in die Lage ε'Φ'e'f' gebracht
a (Fl) so zeigt dieses an, daß die Axe des
hres nicht mit der Wasserfläche αβ, mit-
ch nicht mit der Axe, oder mit den Sei-
en ef, εΦ, der Libelle, parallel sey, son-
aß dieselbe mit der Axe der Libelle einen
n Winkel mache.

Es sey (Fig XIII) ef die Libelle, und nx
e des Fernrohres, welche mit der Libelle
Winkel eyn = α mache; Die Linien ne,
e auf nx senkrecht gezogen worden, mögen
erbindungslinien der Libelle mit dem Fern-
ausdrücken — Nun sey die Ebene enfx
l und die Luftblase αβ erscheine in der Mitte
, so ist die Richtung ef horizontal, und
rlängerte Axe des Fernrohres macht mit
orizontallinie ey einen Winkel = α

VI. Man stelle sich nun vor, die Axe nx ble
be unverrückt, um dieselbe werde aber die Ebe
nefx dergestalt gedrehet, daß sie in die La
nεφx komme, und abermahls vertical sey,
wird die Libelle ef in die Lage εφ kommen, un
mit der in der Ebene εnφx durch ε gezogene
Horizontallinie pεt einen Winkel yεt = 2. fyx =
2. α machen. Die Luftblase, würde also nic
in der Mitte von εφ stehen bleiben, sondern hi
von ε nach φ heraufsteigen, und bey φ hänge
bleiben.

VII. Dieser Satz nun, daß, wenn bey d
erstern Richtung ef die Libelle horizontal ist, di
selbe nach der geschehenen Umwendung des Fer
rohres, in der Lage εφ, mit dem Horizonte eine
Winkel macht, der doppelt so groß ist, als de
welchen die Axe des Fernrohres mit der Libel
macht, wird uns ein leichtes Mittel an die Han
geben, die Axe des Fernrohres sehr genau in e
ne horizontale Stellung zu bringen, und d
Libelle parallel zu machen; das Verfahren beste
het in folgendem.

VIII. 1. Man stelle den Winkelmesser gehö
rig auf sein Stativ, und bringe die Ebene de
selben in eine verticale Lage, welches dadurch ge
schiehet, daß man das Werkzeug so lange i
der zugehörigen Nus herumwendet bis ein Lot
wz (Fig. XIV), welches man längst der Eben

ndes herabhängen läst, den Rand bey a,b
ühret, ohne sich an denselben zu reiben.

XIV Figur stelle also solchergestalt den
messer in einer verticalen Lage vor; nx
fernrohr, und ef die daran angebrachte
MK die Micrometerschraube, die die Al-
regel, mithin auch das Fernrohr regiert.

Ich setze nun, daß man die Libelle ef, ver-
der Hülsen N, Q (Fig X) in eine solche
ebracht habe, daß sie sich oberhalb des
hres befinde, und wenigstens so genau,
nach dem Augenmaße geschehen kan, mit
e des Fernrohrs in einer und derselben
alebene liege.

Wenn dies geschehen ist, mache man ver-
t der Stellschraube kr, Fig XIV wenigstens
m Augenmaße die Libelle ef, dem Fernrohre
allel, und bringe demnächst, durch Um-
g der Alhidadenregel, das Fernrohr in
che Richtung, daß die daran befestigte
ef genau horizontal stehet, und folglich
fblase αβ, in der Mitte erscheinet.

In dieser Lage bleibe das Fernrohr unver-
und man befestige daher die Alhidaden-
an den Rand.

6. Da nun die Libelle nur nach dem Aug
maaße mit dem Fernrohre parallel ist, so w
die Axe des Fernrohres mit der horizontalen Ri
tung der Libelle nur einen sehr kleinen Win
= α (V) machen.

7. Um den Werth von α zu finden, le
man die Ebene des Werkzeugs und die Alhi
denregel in unverrückter Stellung, löse die b
den Schrauben, die das Fernrohr in den H
sen H H Fig X festhalten, und wende hier
nach (VI) das Fernrohr nx, mit der daran
festigten Libelle, um seine unbewegliche Axe, b
die Libelle unterhalb des Fernrohres in die La
εΦ, und zwar nach dem Augenmaaße mit d
Axe des Fernrohrs in einer und derselben V
ticalebene zu liegen komme.

8. In dieser Lage εΦ wird die Luftblase nic
in der Mitte stehen bleiben, (es müste de
durch einen sehr seltenen Zufall, die Libelle m
dem Fernrohre, nach dem Augenmaaße, gen
parallel geworden seyn) sondern hier z. E. von
nach Φ heraufsteigen, und

9. Die jetzige Richtung εΦ, wird mit d
Horizontallinie zt einen Winkel = 2. α mach
(VII)

Es ist klar, wenn man die geneigte Libelle
ne horizontale Lage bringen wolte, sol-
rch Umdrehung der Alhidadenregel ge-
könte; Man müste nemlich durch Um-
der Alhidadenregel, die Lage des Fern-
mithin auch zugleich die Richtung der
φ um den Winkel 2. α verändern, und
r in der Figur die Luftblase bey φ hän-
bt, also φ höher liegt als ε, so müste man
idadenregel so drehen, daß das Ende φ,
r zu liegen, das entgegengesetzte ε aber
Höhe käme, bis ε, φ beyde in einer Ho-
linie lägen.

Da nun der Winkel $\varphi\varepsilon t = 2\,\alpha$ nur
yn wird, so kan man die Wendung der
denregel bloß vermittelst der Micrometer-
e MK bewerkstelligen. Man wende also
rum, bis die Alhidadenregel so viel ver-
worden, daß $\varepsilon\varphi$ in eine horizontale Rich-
ekommen ist, so werden die gezählten Um-
gen der Micrometerschraube den kleinen
el $\varphi\varepsilon t = 2\,\alpha$ geben, den die geneigte Rich-
der Libelle $\varepsilon\varphi$ mit der Horizontallinie εt
e.

. Die Hälfte der gefundenen Umdrehungen
den Winkel α, oder die Neigung der Li
gegen die Axe des Fernrohres. (VII)

13. Wenn man sich in Fig XIII die Lage
Libelle, εΦ. vorstellet, wie sie mit der Horiz
tallinie ε' den Winkel Φεt = 2 α macht,
wird hingegen das Fernrohr nx mit der Ho
zontallinie εΦ nur einen Winkel npε = ½ Φ
= α machen. Wird daher nach dem Verfa
ren (1) das Fernrohr nx mit der daran be
stigten Libelle, um das Centrum o, vermitte
Umwendung der Micrometerschraube, gedreh
bis die Libelle εΦ horizontal geworden ist,
hätte man nur halb so viel Umdrehungen nöth
gehabt, das Fernrohr nx in die horizonta
Richtung zu bringen weil die Libelle εΦ gea
die Horizontallinie um einen Winkel Φεt genei
ist, der doppelt so groß ist als der npε, welch
des Fernrohrs Richtung mit der Horizontall
nie macht. Hätte man also um der Libelle ε
die horizontale Lage zu verschaffen, die Micr
meterschraube MK (Fig XIV) 3 E 8mahl herun
drehen müssen, so drehe man nachdem die L
belle horizontal geworden, wieder 4 Umdrehun
gen rückwärts, so wird demnächst das Fernroh
nx horizontal seyn, die Libelle aber nur eine
Winkel = α mit der Horizontallinie machen.

14. Nachdem nun solchergestalt in (13) da
Fernrohr einmahl eine horizontale Lage bekom
men hat, so wird man demnächst auch ga
leicht die Libelle εΦ dem Fernrohre parallel ma
che

en; Man lasse nemlich das Fernrohr
t in seiner horizontalen Lage und drehe
ft die Stellschraube kr, welche sich ietzo
nden wird, herum, bis die Luftblase
itte von ☉ ruhig stehen bleibt; so ist
dem Augenblicke die Libelle horizontal,
em horizontalen Fernrohre parallel.

Auf diese Art kan man also sehr sicher die
it dem Fernrohre parallel machen, be-
wenn man die Vorschrift wiederholt, und
le aus ihrer untern Lage, wieder ober-
Fernrohrs, in die Lage et bringt, in
auch noch horizontal seyn muß, wenn
bisherigen Verfahren nicht kleine Feh-
ngen worden sind. Entdeckt man sol-
lt einige Unrichtigkeit, so muß man die
10—14) von neuem vornehmen, bis
die Luftblase immer in der Mitte der Li-
ig stehen bleibt, man mag die Libelle um
nrohr drehen wie man will — die wich-
Vorsicht die man übrigens bey dem bisher
benen Verfahren zu beobachten hat, ist,
Ebene des Werkzeugs während der Ope-
in einer unverrückten Lage bleibe.

Wenn nun ein für allemahl die Libelle mit
ernrohre parallel gemacht worden ist, so
demnächst leicht, an jedem Orte, wo
as Werkzeug hinbringt, sogleich die ho-

rizon-

rizontale Lage des Fernrohres zu erhalten. D
darf nehmlich die Alhidadenregel nur so la
herumwenden, bis die Luftblase in der Mitte
Libelle ruhig stehen bleibt, so ist in dem Aug
blicke auch das Fernrohr horizontal.

Beym Forttragen des Werkzeugs von ei
Station auf dem Felde, zur andern, muß m
aber davor sorgen, daß sich unterdessen die Lib
an dem Fernrohre nicht verrücke, und folg
aus ihrer parallelen Lage komme.

17. Die bisherige Methode, eine Libelle d
Fernrohre parallel zu machen, wird man
würklicher Handanlegung sehr leicht und bequ
finden — Sonst aber giebt es auch and
Methoden z. E. Hr. Mech. Branders. M.
Picards Abh. vom Wasserwägen, mit 4
Lamberts Beyträgen p. 294. Ich halte al
die bisher beschriebene zu meiner Absicht für g
schickter.

Ich wende mich nun nach den bisherigen Vo
bereitungen zu folgender

Aufgabe.

§. 155. Einen Winkel POa (Fig IX) der si
in einer Verticalebene befindet, auszumesse
Der eine Schenkel desselben Oa wird horizont
angenommen (§. 151.)

Au

Auflösung.

an setze den Winkelmesser (§ 99) gehö
sein Stativ, und bringe die Ebene des
rmittelst eines Lothes in eine verticale

ch setze zum voraus, daß durch einen
die Libelle bereits mit dem Fernrohre in
llele Lage gebracht worden ist.

Man drehe das Werkzeug auf dem Zapfen
tivs so lange, bis der verticalgestellte
es Winkelmessers, so stehet, daß, wenn
Fernrohr nach dem Objekte P hinrichtet,
n dem Durchschnitte der beyden Kreuz-
oder in der Axe des Fernrohres erscheinet.
ieses bewerkstelligt ist, so sagt man, die
des Winkelmessers sey in die Verti-
e des auszumessenden Winkels POa
chtet worden.

Nachdem dieses geschehen ist, bringe
n Index des Vernier genau an den Punkt
Eintheilungen des Randes, und befestige
idadenregel an den Rand.

Man löse an dem Werkzeuge die §. 99. 16
hl. Tab. V. Fig LIX mit L bezeichnete
be, so wird man das verticalgestellte
ug um den horizontalen Zapfen der Muß
wenden können; so, daß die Ebene des

Werk-

Werkzeugs beständig vertical bleibt. Man solchergestalt durch Wendung des ganzen W zeuges es dahin bringen, daß das auf o° ge Fernrohr (IV) genau in eine horizontale Lage O IX zu liegen komme. Dis wird nemlich gesche wenn die Luftblase der Libelle in der Mitte der se erscheinet. In dem Augenblicke da dieses schiehet, ziehe man die Schraube L wieder damit das Fernrohr unverrückt in seiner hori talen Lage bleibe. Solte während daß man Schraube L anziehet, das Fernrohr wieder was aus der horizontalen Lage kommen, so diene man sich der §. 99. 12 genannten S schraube Wz, so wird man durch eine sa Bewegung des vertical gestellten Winkel sers, dem Fernrohre wieder völlig genau die rizontale Stellung verschaffen können.

VI. Es ist also durch das bisherige Verf ren, der Winkelmesser genau vertical gest worden, und das Fernrohr lOl. Fig IX hat e horizontale Lage, bey der zugleich der Index Vernier auf o° stehet.

VII. Man lasse also an dem Werkzeuge les in unverrückter Stellung, löse die Alhidad regel, und drehe dieselbe bis man durch d Fernrohr in der Richtung mOn das erhabe Objekt P erblicket, und in dem Augenblicke be stige man die Alhidadenregel wieder an den Ra

man demnächst aus dem Bogen Lm, der Index des Vernier beschrieben hat, as des Winkels LOm oder nOl, mithin bation des Objects P über der Horizon- Ola erfahren.

Man kan hierauf um sich von der Rich- er Arbeit zu versichern, den Index des wieder zurück auf o° führen, und un- , ob in dieser Lage die Libelle noch hori- ehet, ob folglich während daß man das aus der horizontalen Richtung Ol in die hte, sich die Ebene des Werkzeuas nicht hat; ein gleiches könte man, vermit- s Probierfernrohres (§ 131. VIII) erfah- enn das Werkzeug mit einem versehen

Anmerkungen

5. 1. Der Winkelmesser, dessen Beschrei- ir in dem ersten Theile § 99 gegeben ist von der Beschaffenheit, daß die Gra- der linken Hand gegen die rechte gezählet — also auf dem verticalen Kreise Fig IX. Richtung LvnlmL Wenn folglich bey tehet und das Fernrohr aus der horizon- ge Ll in die elevirte mn gebracht wird, so uft der Index des Nonier den Bogen ber nicht nach der Richtung, nach wel-

cher

cher die Grade gezählet werden, sondern r
wärts. Damit man nun die richtige Grösse
Bogens Lm erfahre, so untersuche man, r
nach der Richtung, nach der die Grade gezä
werden, der Index des Vernier bey m wei
Gesetzt er wiese den Bogen Lvnlm = 355° 1
so ziehe man diesen Bogen von 360° ab, so
hält man die richtige Grösse des Bogens
= 4°. 50', das Maaß des gesuchten Win
POa.

II. Eine der wichtigsten Eigenschaften
Messung der Verticalwinkel ist, daß der Du
schnitt der Kreußlinien im Brennpunkte des Fe
rohres ganz genau in der Axe desselben li
Daher der Mechanicus bey diesem Umstande
mögliche Vorsicht anwenden muß. Man
sich davon gehörig versichern, wenn man
Fernrohr nach einem gewissen Objekte so rich
daß der erwähnte Durchschnitt der beyden Kr
linien einen gewissen kenntlichen Punkt des O
jekts decket, hierauf das Fernrohr innerhalb
Hülsen H, H, Fig X herumwendet, und un
suchet, ob der erwähnte Durchschnitt den
merkten Punkt des Objekts nicht verlässet.
bey Umwendung des Fernrohres der Durchschn
der beyden Kreußlinien um die wahre Umd
hungsaxe des Fernrohrs einen Kreis beschreib
muß, wenn solcher nicht genau in der Axe lie
so liessen sich gar leicht Mittel ausfindig mach

Durchmesser des beschriebenen Kreises,
an dem entlegenen Objecte beobachten
ie Grösse des Fehlers, oder die Abwei-
es Durchschnitts der beyden Kreutzlinien
Axe des Fernrohres zu bestimmen; Ich
nich aber hiebey nicht länger aufhalten,
Sache an sich leicht ist, und ich auch
s dem Mechanico die Geschicklichkeit zu-
kan, die Linien auf das Glas so zu reis-
ß ihr Durchschnitt genau in die Axe des
res zu liegen komme.

Es entstehen auch kleine Fehler bey Aus-
eines Verticalwinkels 1) wenn die Ebe-
Werkzeugs nicht genau in eine verticale
bracht worden ist, 2) wenn die Axe des
res der Ebene des Winkelmessers nicht
parallel ist — Obgleich die erwähnten
n bey Höhenmessungen selten von gros-
lgen sind, so erfordert es doch die Ein-
nes Feldmessers, wenigstens einen ohnge-
Ueberschlag zu machen, wie groß etwa
er entstehenden Fehler seyn mögen, und
ird folgendes dienlich seyn.

Fehler welche aus den beyden Ursach (III) zusammengenommen, bey Ausme sung eines Verticalwinkels zu be. fürchten sind.

§. 157. I. Es sey BCcN, Fig XV, ein Stück von d eingetheilten Bogen des Winkelmessers; A sen Mittelpunkt, um welchen sich die Alhidad regel, und folglich das Fernrohr drehet. M gedenke sich durch A eine Horizontalebene, die Ebene des Werkzeugs in der geraden Linie durchschneide; Mit dem Halbmesser des Inst ments AB beschreibe man in der Horizontalflä den Bogen BM. Weil ich nun annehme, Winkelmesser stehe nicht vertical, mithin ni auf der Horizontalfläche senkrecht, so wird sphärische Winkel NBM, als der Neigungsw kel des Werkzeugs gegen die Horizontalfläc nicht genau $= 90°$ seyn. Ich will also NBM $90° - \gamma$ setzen, wo also γ des Werkzeu Neigung gegen die Verticalfläche bedeutet; AB sey eine Ebene durch BA, auf das Werkze senkrecht; also der sphärische Winkel NBL $90°$, folglich der kleine Winkel MBL $=$ NB $-$ NBM $= \gamma$.

II. Man nehme nun an, die Linie AE in d Horizontalfläche, stelle das nach der Libelle h rizontalgerichtete Fernrohr vor, und da ich vo aussetze, das Fernrohr mache mit der Ebene d

gs einen kleinen Winkel, so lege man
E eine Ebene CAE auf das Werkzeug
, welche die Ebene des Winkelmessers,
die Alhidadenregel in der geraden Linie
eide, so wird der Winkel CAE des
s Neigung gegen das Werkzeug, und
en CE, mit dem Halbmesser CA = BA
n, dieses Winkels CAE Maaß seyn. Ich
E oder den Bogen CE = β nennen.

Besetzt nun, die Alhidadenregel AC
Lage das Fernrohr AE horizontal ist,
die Richtung Ac gebracht, bey der man
s Fernrohr, welches aus der horizonta-
AE in die Ae gekommen seyn wird, das
horizontale Ebene erhöhete Object sehe.
ß man sich nun gleichsam vorstellen, durch
ng der Alhidadenregel, komme der Win-
in die Lage cAe; wo die Ebene cAc
der Ebene des Werkzeugs senkrecht
und der Bogen ce = CE = β (II)
).

Ae lege man nun eine auf die Hori-
che BDM senkrechte Ebene eAD, die die
alfläche in AD durchschneide, so ist ei-
der Verticalwinkel eAD, der wahre
nswinkel des Objects über der Horizon-
, und eD dessen Maaß.

Der Winkel CAc, oder der Bogen C
aber derjenige welchen die Alhidadenregel,
hin der Index des Vernier auf dem Werkz
beschrieben hat, indem das Fernrohr aus der
rizontalen Richtung AE, in die Richtung
gebracht worden ist. Wolte man also diesen
gen Cc, den ich = α nennen will, für des W
kels eAD Maaß annehmen, so würde man
fenbar einen Fehler begehen, weil Cc nicht
Bogen De gleich seyn kan.

Aus den gegebenen Grössen α, β, γ, n
man aber gar leicht den Bogen eD = x, n
hin den wahren auszumessenden Elevationsw
kel eAD bestimmen.

IV. Man nehme die Bogen BcN, DeO,
BM Quadranten gleich, so wird L des Krei
BcN, N des Kreises BL, und O des Krei
BM Pol. ML aber des Winkels LBM =
Maaß.

V Ferner ist der Bogen cN, das Maaß d
Winkels cLN am Pole des Kreises BN. M
nenne den kleinen Bogen BC = ψ, so ist cN
90° — cB = 90° — (α + ψ)

VI. Der Bogen eO = 90° — De =
90° — x (III)

VII. LO = MO + ML = 90° + γ (IV)

VII

Weil ferner auch ceL = 90°, so hat
= 90° — ce = 90° — β. (III)

Man suche nun in dem sphärischen Drey-
aus den beyden Seiten eL, OL, und
schlossenen Winkel eLO = cLN, die
ite eO, nach (Trig S. LII. 2) so wird
: sin eL sin LO cos eLO + cos eL cos OL
(IV. V. VI. VII. VIII) die gehörigen
substituirt

$$x = \cos\beta \cos\gamma \sin(\alpha + \psi) - \sin\beta \sin\gamma.$$

ermittelst dieses Ausdrucks findet man
den bekanten Grössen β, γ, α, ψ, den
Elevationswinkel eAD = x.

Daß ψ eine bekante Grösse in dieser For-
, erhellet so.

n in der Figur der Bogen eC = α = 0
. h. der Punkt c auf C fält, so fällt das
r Ae in die Horizontalfläche, und hat in
lage AE.

ist für diesen Fall auch x = 0; Setzt
nnach in die Formel IX, so wohl α als
= 0, so erhält man
$\cos\beta \cos\gamma \sin\psi - \sin\beta \sin\gamma$

$$\text{also } \sin\psi = \frac{\sin\beta\sin\gamma}{\cos\beta\cos\gamma} = \tan\beta\tan$$

Es ist also ψ eine bekante Grösse, indem durch die beyden Grössen β, γ, bestimmt i

XI. Weil aus (X)

$$\sin\beta\sin\gamma = \sin\psi\cos\beta\cos\gamma$$

so substituire man diesen Werth in die Gleichu (IX) dann wird

XII. $\sin x = \cos\beta\cos\gamma(\sin(\alpha+\psi)-\sin$

XIII. Aber aus (Trig S. XIII. 12) (das dor ge $\Phi = \alpha + \psi$ gesetzt) folgt $\sin(\alpha+\psi)-$ $\sin\psi = 2\cos(\frac{1}{2}\alpha+\psi)\sin\frac{1}{2}\alpha$

Also wird

$\sin x = 2\cos\beta\cos\gamma\sin\frac{1}{2}\alpha\cos(\frac{1}{2}\alpha+\psi$

welche Formel sehr bequem ist, den wahren Wi kel x durch Logarithmen zu berechnen.

XIV. Wenn die Grössen β, γ, wie gewöhn lich nur sehr klein sind, so wird auch ψ in (X sehr klein seyn; dieses verstattet demnach blo $\psi = \beta.\gamma$ zu setzen, wo ψ, β, γ Decimal theile des Sinus totus bedeuten; sind aber ψ, β γ in Secunden ausgedrückt, so hat man

ψ

$\frac{\quad}{64} = \frac{\beta}{206264} \cdot \frac{\gamma}{206264}$ mithin

nden

$= \frac{\beta . \gamma}{206264}$

Ex. Man seße die Abweichung des Werk-
on der Verticalfläche $\gamma = 10^{l} = 600''$;
nrohres Neigung gegen das Werkzeug
$= 8^{l} = 480''$, den Bogen α den die
enregel auf dem Werkzeuge beschrieben
$20^{0}. 30^{l}$; so hat man erstl. für den Bo-

g β	=	2,6812412
g γ	=	2,7781512
$\beta \gamma$	=	5,4593924
6264	=	5,3144252 (Trig S. V.)
ψ	=	0,1449672

$\psi = 1'',5$

rhellet also, daß man in diesem Ex. den
ψ ganz bey der folgenden Rechnung
en kan, da er nur etwas über eine Se-
beträgt. Also wird für x,

$$\begin{aligned}
\log\ 2 &= 0{,}3010300 \\
\log \cos \beta &= 9{,}9999988 - 10 \\
\log \cos \gamma &= 9{,}9999982 - 10 \\
\log \sin \tfrac{1}{2}\alpha &= 9{,}2502822 - 10 \\
\log \cos \tfrac{1}{2}\alpha &= 9{,}9930131 - 10 \\
\hline
\log \sin x &= 9{,}5443224
\end{aligned}$$

$x = 20^\circ\ 29'.\ 56''$; also $\alpha - x = 4''$

Es wäre also bey den angenommenen Grösse der wahre Verticalwinkel x nur um 4″ kleine als der, welchen die Alhidadenregel beschrieb hat, indem das Fernrohr aus dem horizontale Stande nach dem erhöheten Objecte gericht wurde. Dieses ist in der That ein Fehler, we cher in der practischen Geometrie immer fü Nichts angesehen werden kan.

XVI. Es wird sich nun, wie in diesem, f auch in andern Beyspielen, und überhaupt au der Natur der Formel zeigen, daß eine klein Abweichung des Fernrohres von dem paralleler Stande, und eine geringe Schiefe des Werk zeugs, fast immer nur einen sehr unbeträchtli chen Fehler hervorbringen werden, wenn man auch gleich, die Grössen β, α, γ, weit grösser annähme, als in dem Beyspiele (XV) geschehen ist. Aus diesen Ursachen darf also in den wenigsten Fällen ein Feldmesser sehr besorgt seyn. Weit wichtiger ist aber bey Höhenmessungen die Vorschrift, die Libelle mit dem Fernrohre so ge-

lich parallel zu machen, weil aus dieser die vorzüglichsten Fehler zu besorgen

. In den meisten Fällen, wenn anders icht eine sehr beträchtliche Grösse haben, man immer wird voraus setzen können) an ohne merklichen Fehler, die Berech- es Bogens ψ sich ganz ersparen können, ur immer einige wenige Secunden betra- rd. Dis giebt demnach, $\psi = 0$ ge- ir x folgende weit kürzere Formel.

$$\sin x = 2 \operatorname{col}\beta \operatorname{col}\gamma \sin \tfrac{1}{2}\alpha \operatorname{col}\tfrac{1}{2}\alpha$$

sich wegen $2 \sin \frac{1}{2}\alpha \operatorname{col}\frac{1}{2}\alpha = \sin\alpha$ in

$$\sin x = \operatorname{col}\beta \operatorname{col}\gamma \sin\alpha$$

enziehet, welche sehr geschwinde durch Lo- en zu berechnen stehet.

II. Wenn das Fernrohr dem Werkzeuge also $\beta = 0$ ist, das Werkzeug aber um inkel γ von der Verticalebene abweichet, man blos

$$\sin x = \operatorname{col}\gamma \sin\alpha$$

. Wäre aber das Werkzeug genau verti- lso $\gamma = 0$, das Fernrohr aber um den l β gegen das Werkzeug geneigt, so hätte

$$\sin x = \operatorname{col}\beta \sin\alpha$$

XX. Wenn endlich so wohl $\beta = o$ als α $\gamma = o$ wäre, so würde

$$\sin x = \sin \alpha \text{ mithin}$$

$$x = \alpha$$

d. h. der wahre Winkel, demjenigen gleich, welchen das Werkzeug angiebt.

Gebrauch der Quadranten, Verticalwinkel zu messen, und Ersparung einer Libelle dabey.

§. 158. Bey Höhenmessungen pflegt man sich sonst auch der Quadranten ohngefähr auf folgende Art zu bedienen.

1. Es sey (Tab. II Fig. XVI) ba der eingetheilte Rand eines solchen Werkzeugs, und der Bogen von o bis 90 einem Quadranten gleich, c dessen Mittelpunkt, um den das Fernrohr de mit der daran befindlichen Vernierplatte rm beweglich ist. i, k, ein paar Punkte auf der Ebene des Werkzeugs, welche so liegen, daß eine Linie durch sie, wie ik, mit der Linie c90° genau parallel ist, welche durch das Centrum c, und den Theilpunkt 90 gehet — Wenn nun die Ebene des Quadranten genau vertical gestellet, und so gerichtet worden, daß ein Loth in, durch die beyden Punkte i, k, gehet, mithin ik dadurch eine verticale Lage erhalten hat, so wird auch der Halbmesser c 90° vertical, mithin der Halbmesser

: o° horizontal seyn. Wenn nun von dem
nico die Einrichtung so getroffen worden,
Linie cr, die man sich durch das Centrum
den Index r des Vernier einbildet, ge-
r Axe des Fernrohrs de parallel ist, so er-
daß wenn co° horizontal gestellet wor-
nd durch Umdrehung des Fernrohrs, der
r des Vernier an den ersten Theilpunkt o°
t wird, mithin die Linie cr, in den hori-
n Halbmesser co° zu liegen kömt, alsdenn
ie Axe des Fernrohres, eine horizontale La-
en werde. Wird demnächst, das Fern-
us dieser horizontalen Richtung, in die
ng de gebracht, so ist der Bogen o°r, das
des Winkels, um den das Objekt, nach
n das Fernrohr de zielet, über der Ho-
llinie co° elevirt ist.

erhellet also, wie bloß vermittelst des Lo-
, die horizontale Lage des Fernrohrs er-
werden kan, wie man also zu dieser Ab-
ne Libelle ersparen könne.

ein wenn man überlegt, daß die gewöhn-
geometrischen Werkzeuge nicht sehr groß
ürfen, so wird die Linie ik nicht die gehö-
inge haben, welche erfordert wird, wenn
ttelst des Lothes in, der Halbmesser c90°
enau eine verticale Lage erhalten soll. Denn
klar, je weiter die Punkte i, k, durch

wel-

welche das Loth gehet, von einander entfer
sind, desto sicherer wird auch die richtige V
ticalstellung der Linie ik ausfallen. Wenn m
ferner in Erwägung ziehet, wie nothwendig
sey, daß ik genau mit c 90°, und cr genau n
der Axe des Fernrohres parallel gemacht word
sey, und wie viele, oft beschwerliche Prüfunge
nöthig sind, sich davon gehörig zu versichern,
wird man, wenigstens bey Geometrischen We
zeugen sich immer lieber einer Libelle bedien
die horizontale Richtung des Fernrohres zu e
halten, weil 1) ihre Prüfung nicht mit so viel
Umständen verknüpft ist, und 2) weil, wenn
eine Länge von 5 bis 6 Zollen hat und überdem au
geschliffen ist, weit sicherer den horizontale
Stand des Fernrohrs geben wird, als es ve
mittelst eines Lothes an einem kleinen Quadra
ten geschehen kan. Hat aber der Quadrant e
ne beträchtliche Grösse, z. E. von 2 oder $2\frac{1}{2}$ Fu
sen im Halbmesser, dann ziehe ich das Loth vor
weil die gehörige Anbringung der Libelle an da
Fernrohr und andere Vorrichtungen dabey, Be
schwerlichkeiten ausgesetzt seyn würden, die be
einem kleinen Winkelmesser nicht statt finden.

2. Die Art, wie übrigens an einem Quadran
ten, die gehörige verticale und horizontale Wen
dung erhalten werden kan, muß man aus an
dern Schriftstellern, z. E. aus Herrn *de la Land*
Astronomie Tom. II. §. 2311 (a Paris 1771) Bi
ons

thematischen Werkschule VI. B. I Kap.
s den Schriften kennen lernen, die von
g eines Grades, auf der Erdfläche han-

XIII. Kapitel.

Fehler der geometrischen Werkzeuge ch Versuche ausfindig zu machen.

159. Ein jeder Geometer, der bey wichtigen Messungen etwas richtiges will, wird vorher die Zuverläßigkeit seiserkzeuge prüfen, und deren Fehler zu entsuchen — Insbesondere ist diese Vor- Absicht derer Instrumente zu empfehlen, nen Winkel gemessen werden. Findet man tliche Unrichtigkeiten, so wird man verger Weise Rücksicht auf sie nehmen, und nem jeden ausgemessenen Winkel die nöthi- rbesserung anbringen.

h werde nun in diesem Kapitel, unterschie- Methoden angeben, die Richtigkeit eines trischen Winkelmessers zu untersuchen, und vorzüglich auf den Winkelmesser einschränden ich im ersten Theile dieses Buches beben habe. Ein kleines Nachdenken, wird

einem

einem jeden leicht die Mittel an die Ha
ben, ähnliche Prüfungen bey andern W
messern anzustellen.

Man kan nun überhaupt bey diesem Ge
folgende Fragen thun.

Erstens. Ob der eingetheilte Rand
Winkelmessers seine gehörige Richtigkeit
und wenn Fehler in dessen Abtheilungen e
ten sind, an welcher Stelle des Randes s
befinden.

Zweitens. Ob die Abtheilungen des B
ihre gehörige Genauigkeit haben, und der
nier den gehörigen Bogen fasset. Auch o
Indices der Verniere sowohl der 90 al
Theilung, genau in einer geraden Linie li

Drittens. Ob das Fernrohr genau in
Ebene auf und nieder beweglich ist, die auf
Werkzeuge senkrecht stehet — dieses zu unt
chen ist bereits im XI Kap. gewiesen worde

Viertens. Ob der Winkelmesser excent
sey; dieses sind die wichtigsten Fragen, die
überdie Güte eines geom. Winkelmessers anst
kan — Folgendes wird nun zeigen, wie
che Untersuchungen anzustellen wären.

P

e man die Unrichtigkeiten in den Ab- theilungen des Randes bestimmen könne.

160. 1. Wenn man bloß untersuchen will, Ungleichheiten in den Abtheilungen des Ran- enthalten sind, ohne übrigens die eigentliche se derselben zu bestimmen, so kan dieses oft vermittelst eines sehr guten Stangenzirkels, hieden werden.

Man fasset nemlich, mit aller möglichen ärfe, einen gewissen Bogen des Randes, . 30° zwischen beyde Spitzen des Stan- irkels, und prüfet, ob diese Weite durch- nds auf der ganzen Peripherie von gleicher se sey. Vorzüglich ist dieser Versuch mit Bogen von 90° anzustellen, wodurch man rt, ob die ganze Peripherie gehörig in 4 he Theile getheilt ist; Es braucht keine Er- erung, daß man jederzeit die Spitzen des ngenzirkels genau in die Theilpunkte einse- und sich allenfalls eines Vergrösserungsgla- abey bedienen müsse.

Durch dieses Verfahren findet man, ob wenig- grobe Fehler in den Hauptpunkten des Ran- enthalten sind; Aehnliche Prüfungen werden auch auf der 96 Theilung vorgenommen.

Sol-

Solchergestalt zeigt sich überhaupt, richtigkeiten in den Abtheilungen vo sind — die Grösse derselben ausfindig chen, wird nun die Folge ausweisen.

Kleine Fehler in den Theilpunkten de des, werden sich nun freylich wohl n mittelst des Stangenzirkels entdecken l Indessen giebt es doch viele Schriftstel bey der Prüfung des eingetheilten Rande astronomischer Werkzeuge, den Stang vorschlagen; De la Lande (Astronomie sagt, man könne sehr gut vermittelst eine genzirkels die Fehler des feingetheilten entdecken.

Warum solte man sich auch nicht des genzirkels zur Aufsuchung wenigstens Fehler bedienen können, welche aus Na keit des Mechanici entstanden sind, da selbst den Stangenzirkel zur Theilung des zeugs braucht?

Wie man vermittelst der Methode welche mein Vater zur genauern A sung eines Winkels vorgeschlagen ha Fehler in den Theilpunkten eines Re bestimmen könne.

§. 161. Fig XVII Tab. IX stelle den F talgestellten Winkelmesser vor; O desse

ıkt, um den sich das Fernrohr drehet, wel-
ch hier der Ebene des Werkzeugs parallel,
ıicht in einem Gewinde auf und nieder be-
ch, annehme; (Dieses erhält man nach (§.
wenn man die Vorrichtung, um die das
rohr auf und nieder beweglich ist, von der
)adenregel abschraubt, und dagegen auf die
)adenregel ein paar Hülsen durch die das
rohr gesteckt wird, befestigt.) Die beyden
ßlinien im Brennpunkte des Fernrohres seyen
stellt, daß eine davon, auf der Ebene des
kzeugs senkrecht stehe, (§. 134) mithin bey
horizontalen Stande des Winkelmessers, eine
cale Lage habe.

)er Index des Vernier stehe bey a auf 0°,
das Fernrohr ziele in dieser Richtung ab,
u nach einem Punkte Q, den man auf ei-
twa 40 bis 50 Fuß von dem Winkelmesser
rnten Wand, verzeichnet hat. Q werde al-
)n der Verticallinie im Brennpunkte des
rohres genau bedecket.

l. Will man nun einen gewissen Bogen des
ides, z. E. den von 0° bis 60°, von 60° bis
° u. s. w. prüfen, so lasse man das Werk
in unverrückter Stellung, löse die Alhida-
egel, und bringe durch Umdrehung derse-
das Fernrohr aus der Richtung ab in die cd,
aß bey c der Index des Vernier genau auf

60° stehet; lasse demnächst von einem G
den man durch Zeichen und Zurufen b
ein Blatt Papier, worauf ein andere
P verzeichnet ist, auf der oberwähnten
lange verschieben, bis P von der Ver
im Brennpunkte des Fernrohres cd eben
nau bedecket wird, so hat man auf dies
nen Winkel POQ abgesteckt, der gen
Bogen ac, oder 60 Graden des Rand
hört. Das Blatt Papier wird demnä
hörig an die Wand feste gemacht.

III. Ob aber nun diese 60 Grad des
wahre 60° sind, und ob auf gleiche W
Bogen 60° bis 120° von 120° bis 180°
auf dem Rande des Werkzeugs die g
Grösse haben, wird sich auf folgende A
scheiden.

IV. Man lasse das Fernrohr unverrü
60° stehen, und wende nach (§. 135 i
ganze Werkzeug, bis dadurch das F
wieder in die Richtung nach Q komme,
XVIII Figur ausweiset, wo dann die Linie
XVII Figur in die punktirte Richtung
XVIII Figur kommen wird.

V. In dieser zwoten Richtung des Fer
nach Q, wird demnach der Index des V
auf 60° stehen, so wie er bey der ersten

des Fernrohrs nach Q, nemlich in der
Figur, auf 0° stand. Um nun zu un-
chen, ob der Bogen von 60° bis 120° auf
Rande, dem von 0° bis 60° gleich sey,
se man die Ebene des ganzen Werkzeugs
rückt und bringe durch bloße Umdrehung
Alhidadenregel den Index des Vernier
an den Theilstrich n des Randes, der zu
gehöret. Befestige dann die Alhidadenre-
gieder, und visire durchs Fernrohr nun —
die Verticallinie in Brennpunkte desselben,
den Punkt P, so ist der Bogen von 60°
20°, dem von 0° bis 60° gleich, oder
= ac. Geschiehet dieses aber nicht, sondern
Ziellinie des Fernrohres deckt einen andern
ft p, so bringe man durch sanfte Umwen-
der Micrometerschraube das Fernrohr völ-
nau in die Richtung nach P, dergestalt, daß
nm in die Richtung c'd' zu liegen komme.

l. Nach dieser geringen Verrükung des Fern-
, wird aber der Index des Vernier nicht
bey n an dem Theilstriche 120 stehen, son-
sich bey c befinden, und von n einen ge-
n Abstand c n haben, den man als bekant
ansehen können, wenn man die Umdrehun-
er Micrometerschraube gezählet hat, die
dert wurden, das Fernrohr aus der Lage
völlig genau in die Richtung nach P zu

bringen, und solche demnach in Minu
Sec. verwandelt. Ich will also den
c'n, als Maaß des kleinen Winkels nC
POp, = α nennen.

VII. In diesen Abstande α von den
punkte 120, lasse man bey c' den In
verrückt, bringe erstlich durch Wendu
ganzen Werkzeugs das Fernrohr w
die Richtung nach Q, und dann durch
Umdrehung der Alhidadenregel den
auf 180°; Ist dann bey dieser Lage, da
rohr nicht genau nach P gerichtet, so un
man wieder, wie viel Minuten und S
der Index von dem Theilstriche 180 a
nachdem durch eine sanfte Umdrehung d
crometerschraube das Fernrohr genau di
tung nach P erhalten hat. Ich will
am Ende dieser Operation, von dem T
che 180 gefundenen Abstand des Inde
nennen.

VII. Durch Fortsetzung solcher Oper
sey also am Ende der 4ten Operation d
stand des Index von dem Theilstriche,
240° gehört = γ

Am Ende der 5ten Oper. der Abstand v
Theilstriche, der zu 300° gehört = δ

lm Ende der 6ten des Index Abstand von
Theilstriche 360 = e.

VIII. So wird man aus denen durch Hülfe
Micrometerschraube gefundenen Abständen
3 γ, δ ε, nicht allein die eigentliche Grösse
Winkels POQ dem bey der ersten Operation
Bogen von 0° bis 60° zugehörte,
ern auch die wahre Grösse der Bogen von
bis 120° von 120° bis 180° u. s. w. be-
men können.

IX. Nennet man nemlich den Winkel POQ,
den Bogen von 0 bis 60° auf dem Ran-
= a, ferner die Bogen

von 0 bis 120 = b
von 0 — 180 = c
von 0 — 240 = d
von 0 — 300 = e

erhellet, weil von Anfange einer Operation
ans Ende derselben, das Fernrohr immer um
Winkel POQ = a gedrehet worden, daß
n Anfange der ersten Oper. bis ans Ende der
boten, das Fernrohr, oder der Index auf
n Rande den Bogen 2. a beschrieben haben
rd. Da aber am Ende der 2ten Operation
Index den Abstand α vom Theilpunkte 120
tte, und die Weite von 0° bis 120° = b gesezt
rden, so erhellet, daß vom Anfange der er-

ſtern bis ans Ende der 2ten Operation
Bogen $b + \alpha$ wird beſchrieben worde
Daß alſo am Ende der 2ten Operati
müſſe

$$b + \alpha = 2.a$$

Auf gleiche Weiſe erhellet, daß an
der 3ten Operation ſeyn werde $c + \beta =$
Am Ende der 4ten —— $d + \gamma =$
der 5ten —— $e + \delta =$
der 6ten ——$360° + \varepsilon =$

Nemlich am Ende der letzten Operatio
der Index den ganzen Umkreis, und noc
dem den kleinen Bogen ε durchlaufen.

Ich habe hier zwar angenommen,
am Ende einer jeden Operation der Inde
ter Hand der Theilſtriche, 120, 180 u.
geſtanden habe, daß folglich die Werthe
α, β, γ, δ, ε, poſitiv ſeyen. Es e
aber, daß auch einige von dieſen Werth
gativ ſeyn würden, wenn am Ende einer
ſen Operation der Index linker Hand d
wähnten Theilſtriche geſtanden hätte.

X. Aus der Gleichung $360° \mp \varepsilon = 6.$
der man nun erſtlich $a = \frac{360° \mp \varepsilon}{6} = 60°$
Es würde alſo, wenn am Ende der letzten

r

on nicht $\varepsilon = 0$ gefunden worden wäre, der
gen auf dem Rande von 0 bis 60 nicht genaue
° halten, sondern um den Werth $\frac{1}{6}\varepsilon$ grösser
kleiner als 60° seyn.

Diesen Werth von a nun in die übrigen Glei-
gen substituirt giebt

$$b = 120° + \tfrac{2}{6}\varepsilon - \alpha$$
$$c = 180° + \tfrac{3}{6}\varepsilon - \beta$$
$$d = 240° + \tfrac{4}{6}\varepsilon - \gamma$$
$$e = 30° + \tfrac{5}{6}\varepsilon - \delta$$

aus man also die wahre Grösse der Bogen
0° bis 120°, von 0° bis 180° u. s. w.
et

Werthe von b — a, c — b, u. s w. geben
n die Grösse der Bogen von 60° bis 120°
120° bis 180° u. s. w., und zeigen ob jeder
r Bogen genaue 60° halte oder nicht.

II. Ex. Bey einem Winkelmesser, dessen
ius 6 Zoll war, habe ich solchergestalt den
such angestellet und folgende Werthe ge-
den.

$$\alpha = + 2'. 10''$$
$$\beta = - 2'. 30''$$
$$\gamma = - 3'. 0''$$
$$\delta = 0'. 0''$$
$$\varepsilon = + 4'. 0''$$

Diese geben demnach

a = 60°. 0′ 40″
b = 119. 59. 19
c = 180. 4. 30
d = 240. 5. 40
e = 300. 3. 20

Dieser Winkelmesser hatte also, in den
punkten 60, 120, 180 u s. w. merkliche
Da er auf einer Theilscheibe getheilt wo
konte ich schon zum voraus vermuthen,
mit dessen eingetheilten Rande nicht so ge
tig seyn möchte; Ich habe mir nicht die
gegeben, auch die übrigen Abtheilungen
fen — Es erhellet indessen, daß auf ei
liche Art, ein jeder Bogen des Randes,
Grösse ein aliquoter Theil von 360° ist, si
berichtigen lassen.

Noch muß ich erinnern, ‚daß ich bey
Verfahren, weil der Winkelmesser keine
meterschraube hatte, mich einer andern
de bedienet habe, die Werthe von α, β
s. w. ausfindig zu machen. PQ Fig XVI
nemlich eine auf einer Wand gezogene ge
nie, die Punkte P, Q, lagen in dieser Lini
um sie waren kleine Kreise gezogen, um
ser erkennen zu können. POQ war ohn
ein gleichschenklichtes Dreyeck, dessen
QP, OQ, PQ, mit aller möglichen Vors

essen worden waren, um dadurch den Win-
? zu berechnen. Auf die gezogene Linie PQ,
den nun auf beyden Seiten des Punktes P
gewisse Menge von Zollen gesetzt, und durch
rechte Striche jeder in 4 gleiche Theile ge-
let.

Wenn nun der Index des Vernier an einen
oberwähnten Theilstriche 60, 120 u. s w des
ndes, gebracht worden war, und des Fern-
rs Ziellinie alsdann nicht genau den Punkt P
eckte, sondern z. E an einen andern Punkt p
traf, so wurde untersucht, wie viel Zolle und
eile desselben, zwischen P und p enthalten
ren; Theile eines Zolles, die kleiner als $\frac{1}{4}$
ll waren, konten sehr gut geschätzt werden, da
Theilstriche auf Pp durchs Fernrohr sehr kennt-
) waren; Auch wurde angemerkt ob p linker
er rechter Hand P fiel.

Aus den Linien OP, Pp, und dem Winkel P,
urde demnächst der kleine Winkel POp = α
er = β u. s w. berechnet, folglich eben das
leistet, was im vorhergehenden durch die Mi-
ometerschraube geschah, (VI.); nemlich, die
rösse des kleinen Bogens d'm, oder c'n in
Minuten und Secunden bestimmt, so genau als es
ie geringe Grösse des Werkzeugs verstattet.

XII. Diese Methode die Werthe von
u. s. w. zu finden, möchte in der That we
zuverläßiger seyn, als die erstere, wo m
hierzu der Micrometerschraube bedienet.
sie ist etwas weitläuftiger, und erfordr
genaue Messung der Grössen OQ, QP,
und eine jedesmahlige Berechnung des
POp. In dem Exempel (XI) waren in
OP = 724,4; OQ = 699,0; PQ = .7

XIII. Was nun überhaupt bey dem
Verfahren für Vorsichten zu beobachten si
von ist bereits § 136 geredet worden. Ue
habe ich noch zu errinnern, daß die Kreu
im Brennpunkte des Fernrohrs, sehr z
Glas gerissen seyn müssen, damit sie in d
ne einen so kleinen Punkt als möglich, d
mithin der Schätzung sehr kleiner Theile a
Raume Pp, nicht hinderlich fallen. E
muß man nie vergessen, sich eines Ver
rungsglases zu bedienen, wenn der Inde
Vernier an die Theilstriche des Randes geb
wird. Auch ist es für die Richtigkeit des
fahrens sehr vortheilhaft, wenn die Punkte
so stark als möglich erleuchtet sind; Daher
am sichersten verfährt wenn P, Q, schn
Punkte auf einer weißen Fläche sind.

XIV. Bey Prüfung beweglicher astronomi
Werkzeuge, würde die bisher beschriebene

e gleichfalls mit Nutzen gebraucht werden
en, und noch eine weit grössere Genauig-
verstatten, theils wegen des festern Stan-
derselben, theils auch, weil die Grösse der-
n eine genauere Bestimmung der Werthe
3, γ u. s. w. zulässet.

ch ein Verfahren die Ungleichheiten in n Abtheilungen eines Randes zu ent- decken.

. 162. Es erhellet, daß dieses geschehen kön-
wenn man auf dem Rande eines Winkel-
ers zwo Gattungen von Abtheilungen hat,
, wo der Quadrant in 90 Theile, und eine
re, wo er in 96 Theile getheilt ist. Wenn
nemlich den Index des Vernier der 90 Thei-
an einen gewissen Theilstrich des Randes
acht hat, so gebe man acht, was alsdann
Index des Vernier der 96 Theilung weiset;
cire die 96 Theilung auf Grade, Minuten,
w. und vergleiche das Resultat, mit demje-
n, was der Index der 90 Theilung weiset.
det sich ein beträchtlicher Unterschied, so er-
et, daß in einer von beyden Abtheilungen des
ndes ein Fehler stecken müsse, daß also die
ähnten Theilpunkte, an denen die Indices
anden haben, eine Berichtigung von nöthen
en, die man demnächst entweder nach dem

vor-

vorhergehenden §. oder nach andern N
bewerkstelligen kan.

Wie die beyden äussersten Theilstri
Vernier zu Berichtigung der Gra
theilungen dienen können.

§ 163. Man bringe den Index des
genau an einen gewissen Theilstrich des Ra
Dann muß zu gleicher Zeit auch der letzt
strich des V. an einen Theilstrich des
passen; und wenn dis nicht durchgehend
findet, man mag den Index, an welche
strich man will, bringen, so sind zu
Ungleichheiten in den Abtheilungen des D

Gesetzt, der Vernierbogen sey 31 Gra
Randes gleich, so muß, wenn der In
V. genau an des Randes Theilstrich 31 g
wird, der letzte Strich des Vernier genau
Theilstrich o des Randes passen, wenn al
ne gehörige Richtigkeit hat.

Gesetzt nun, man brächte den Inde
Vernier an den Theilstrich 62 des Rande
muß der letzte Strich des Vernier gen
den Theilstrich 31 des Randes passen. G
het dieses nicht, so kan man vermittelst de
crometerschraube befinden, um wie viel N
ten &c. der letzte Strich des Vernier von

ilstriche des Randes, an den er eigentlich
en müste abstehet, um wie viel folglich der
gen des Randes zwischen beyden Theilstrichen
62, grösser oder kleiner ist, als der Bo-
zwischen den Theilstrichen 0, 31;

So kan man also vermittelst der beyden äu-
ten Theilstriche des V. und durch Hülfe der
crometerschraube, sehr viele Unrichtigkeiten
ben Abtheilungen eines Randes entdecken.

ebrauch der Micrometerschraube, die Un-
terabtheilungen in einzelne Grade zu prüfen.

§. 164. Wenn man sich auf die Richtigkeit
r Micrometerschraube verlassen kan, und den
gentlichen Werth ihrer Schraubengänge weiß,
kan man auf folgende Art, die Gradabtheilun-
n des Randes berichtigen.

I. Man bringe den Index des Vernier an
gewissen Theilstrich des Randes z E. an den
heilstrich a (Fig XIX). Wende nun die Mi-
ometerschraube herum, bis der Index an den
ächstfolgenden Theilstrich b gerückt ist, und ver-
andele die gezählten Umdrehungen der Micro-
eterschraube in Minuten u s. w. Geben diese
un genau so viel, als der Bogen ab eigentlich

betra-

betragen müste, so ist die Entfernung de
Theilpunkte a, b richtig.

II. Um nun die Weite bc, der folgen
den Theilpunkte zu prüfen, so drehe man
die Micrometerschraube wieder rückwärt
der Index wieder von b nach a gerückt i
durch kommen in die weibliche Schraube
dieselben Gänge der männlichen, und
nothwendig, wenn man die Weite bc
und mit ab vergleichen will; Bediente n
dieser Vorsicht nicht, so wäre zu befü
daß die etwanige Ungleichheit anderer G
bengänge, der Richtigkeit des Verfahren
theilig seyn möchte.

III. Nachdem nun solchergestalt sich
weiblichen Schraube, wieder dieselben
der männlichen befinden, so löse man die
badenregel, und bringe durch bloße Umwe
derselben, den Index des Vernier an den
punkt b, befestige alsdenn die Alhidade
wieder, und treibe durch Umdrehung der M
meterschraube den Index von b bis an den
sten Theilstrich c, so wird sich zeigen, ob
von b bis c soviel Umdrehungen der Mic
terschraube bekomt, als man von a bis b
ten hat, ob folglich bc = ab sey. In de
gegengesetzten Falle wird der Unterschied

t, und künftig bey Messung der Winkel
ahl in Betrachtung gezogen.

. Auf diese Art erhellet, wie eine ganze
e von Theilpunkten berichtigt werden könne,
zwar sehr genau, wenn man 1) immer ei-
y Schraubengänge braucht, und 2) den
th derselben in Minuten ꝛc. weiß. Wir
n zwar schon § 101 ein Mittel angegeben,
Werth der Schraubengänge zu bestimmen,
iber dieses zu gegenwärtiger Absicht nicht
chend genau ist, so pflegt man sich auch fol-
er Methode zu bedienen.

Werth der Umdrehungen einer Mi-
crometerschraube zu bestimmen.

165. Es sey (Fig XX) ik ein auf dem Fel-
ertical abgesteckter Maasstab, auf dem man
Abtheilungen in Zolle u. s. w. verzeichnet
c sey der Mittelpunkt des von dem Stabe
rnten und vertical gestellten Winkelmessers,
n Fernrohr af, genau horizontal, nach dem
be ik gerichtet worden.

Man bemerke nun, was die Axe des Fern-
es, oder die horizontale der beyden Kreuzli-
im Brennpunkte desselben, bey h für ei-
Theilstrich auf dem verticalen Maasstabe ab-
eidet, oder wenn die Richtung af, nicht

genau

genau auf einen Theilstrich h trift, man nach dem Augenmaaße, wie viel T nes Zolles zwischen der Axe und dem zun der Axe liegenden Theilstriche enthalten

II. Man drehe nun die Micrometer herum, bis die Axe des Fernrohres in eb kömmt, und auf dem verticalen S g einen andern Theilstrich abschneidet, obachte in dem Fernrohre die Anzahl schen g, h, enthaltenen Zolle ꝛc. Me nächst die Weite ch = nk, und berech den Grössen gh, ch, in dem rechtwin Dreyecke chg, den Winkel gch = ace. sem gehören nun so viel Umdrehungen crometerschraube zu, als man nöthig ha Fernrohr, aus der horizontalen Richtung die Lage eb zu bringen, diesen Winkel man also mit der gefundenen Menge v drehungen, so bekömt man den Werth ei drehung in Minuten und Secunden.

III. Da man nun das Fernrohr aus rizontalen Richtung af, nur so viel erhöhe daß, wenn die Axe des Fernrohrs nach g tet ist, auch h noch in dem Fernrohre er und übrigens auch die Weite ch immer groß in Vergleichung mit gh, genomme den muß, so erhellet, daß der Winkel g mer nur klein seyn werde; daher ka

g gch = gch, (Trig. S. VII) ſetzen, dis

t demnach wegen tang gch = $\frac{gh}{ch}$;

gch = $\frac{gh}{ch}$ oder in Secunden

gch = $\frac{gh}{ch}$ 206264

Gehören nun dieſem Winkel, m Umdrehun-
der Micrometerſchraube zu, ſo iſt der Werth

r Umdrehung = $\frac{gh}{m.\ ch}$. 206264 Secunden.

Ex. Bey Prüfung der Micrometerſchraube
meines Vaters Aſtrolabio hatte ich gemeſſen
= 567 Zoll und fand gh = 10, 6 Zoll; m =
Umdreh. alſo

log gh = 1,0253059
log 206264 = 5,3144252

6,3397311
gez. log m. ch = 3,3663670

2, 9733641

u die Zahl 940 gehöret, alſo iſt

1 Umdr. = 940″ = 15′. 40″
0,1 Umdr = 94″ = 1′. 34″

V. Es verſtehet ſich, daß man, wegen der
Meſſung der Gröſſen gh, ch, vorfallenden
nen Unrichtigkeiten, es nicht bey einem Ver-

suche bewenden lassen, sondern, aus
ein Mittel nehmen müsse; Man kö
leicht berechnen, um wie viel sich der T

ner Umdrehung oder die Grösse $\frac{gh.\ 206}{m.\ ch}$

ändern würde, wenn man gh, ch, etw
gemessen hätte; da aber diese Untersuc
sich gar zu leicht ist, so brauche ich m
dabey aufzuhalten.

Wenn man gleich den Werth der
hung einer an dem Werkzeuge befi
Micrometerschraube nicht kennet,
nur die richtige Grösse, eines gewis
gens auf dem Rande z. E. den von 5°
die Unterabtheilungen desselben in
zelne Grade, zu prüfen.

§. 166. I. Es sey Fig XIX ah ein gewi
gen des Randes, von bekanter Grösse,
reits entweder nach dem Verfahren §. 1
auch auf eine andere Art berichtiget wo
Man soll die richtige Grösse der Unterab
gen ab, bc u. s. w. die hier Grade bedeu
gen, ausfindig machen.

II. Man siehet leicht, daß dis gesche
ne, wenn die Verhältnisse der Stückgen ab
bekannt sind

können gefunden werden, wenn man die
hl der Umdrehungen der Micrometerschr.
, die auf ab, bc u. s. w. gehen.

esetzt also die Buchstaben q, r, s, t, u,
hnen die Bogen ab, bc u. s. w. und a,b,c,d,e,
lmdrehungen der Micrometerschraube die
e gehen; Der Bogen ah heisse β.

s ist also der Bogen β in Theile q, r, s, t,u,
ilt, die sich verhalten, wie a, b, c, d, e;
Werth dieser Theile findet man also nach
der Gesellschaftsrechnung, wenn man
zet

$+c+d+e : a = \beta : q$
$+c+d+e : b = \beta : r$
u. s. w.

Dis giebt demnach $q = \frac{a.\beta}{a+b+c+d+e}$

$r = \frac{b.\beta}{a+b+c+d+e}$

u. s. w.

Dodurch man also die Werthe der Bogen
, s, t, u in Minuten und Secunden findet,
man den Bogen β in Minuten und Se-
en ausdruckt.

esetzt, man habe durch Berichtigung gefun-
daß ab = β genau 5° sey, und vermit-

telst der Micrometerschraube durch wie
Versuche folgendes herausgebracht

a = 4,2 Umdr.. auf das Stück
b = 4,3 —— —— ——
c = 4,1 —— —— ——
d = 4,4 —— —— ——
e = 4,5 —— —— ——

S.d.Um. = 21,5 und q + r + s + t + u =

Also $q = \frac{4,2}{21,5} \cdot 5° = \frac{4,2}{21,5}$ 18000″ =

$r = \frac{4,3}{21,5} \cdot 5° = \frac{4,3}{21,5}$ 18000″ =

So erhellet also, wie man auf diese
Werth eines jeden Bogens ab, bc u s r
könne wenn man gleich nicht den eigentliche
der Umdrehung der Micrometerschraub
sondern sich nur auf die Gleichheit ihrer
verlassen kan, welches immer ohne m
Irrthum angenommen werden kan,
auch nach dem 164 § die Vorsicht beobac
bey Prüfung eines jeden Theiles ab, bc
immer ohngefähr dieselben Umgänge d
lichen Schraube, sich in der weiblichen

Prüfung des eingetheilten Randes
telst eines gleichschenklichten Drei
das man auf dem Felde abstec

. 167. I. Es sey Fig XXI, ABC ein gleichschenk-
es Dreyeck, wo $AC = AB = a$, und $CB = b$
nnet werde, so ist nach der bekanten
mel

$$\sin \tfrac{1}{2} A = \frac{b}{2a}$$ also

$$b = 2a \sin \tfrac{1}{2} A$$

I. Wenn man also A, a, als gegeben an-
et, so läst sich daraus b berechnen, und dann
den bekanten Grössen, a, b, das gleich-
nklichte Dreyeck CAB auf dem Felde abste-
, so, daß bey A ein gegebener Winkel hin-
t.

II. Diesen Winkel messe man demnächst mit
n Werkzeuge, und sehe zu, ob ihn das Werk-
g genau so gros angiebt, als er vermöge des
gesteckten Dreyecks CAB seyn muß. Geschie-
es nicht, so wird man aus dem Unterschiede,
Grösse des Fehlers in demjenigen Bogen des
inkelmessers finden, welcher diesen Winkel A
aß. Und so erhellet also, wie dadurch ein
er Bogen des eingetheilten Randes geprüft
rden könte.

III. Dieses Verfahren ist von verschiedenen
chriftstellern empfohlen, und in Ausübung ge-
acht worden — Allein meines Erachtens ist
theils ziemlich weitläuftig theils auch müssen

die Seiten des gleichschenklichten Drey
ausserordentlicher Sorgfalt gemessen ur
steckt werden, wenn die Prüfung des W
ihren erwünschten Erfolg haben soll —
kleine Fehler in Messung der Seiten CA
CB auf den Winkel A Einfluß haben,
es leicht geschehen, daß man dem W
eine Unrichtigkeit Schuld gäbe, wenn
genau den Winkel A so groß angäbe,
vermöge des abgesteckten Dreyecks seyn
doch; der Fehler bloß in dem unrichtig ab
ten Dreyecke liegen könte.

Folgende Betrachtungen werden nun
wie genau man die Seiten des Dreyecks
ken müsse, wenn bey gegenwärtiger P
des Werkzeugs keine groben Fehler en
sollen.

IV. 1. Weil $\sin \frac{1}{2} A = \frac{b}{2a}$, so ist

wenn so wohl b, als a, um etwas falsch
sen worden wären, folglich etwas grösse
kleiner genommen würden, als es die abzu
de Grösse des Winkels A erfordert, daß au
Winkel A seine richtige Grösse nicht er
würde.

2. Man nehme also an, b, verändere sic
db (Trig S. XXVII) a, um da, wo folglic

die Fehler bedeuten können, die in Mes-
der Grössen b, a, vorgefallen sind, so wird
auch A um eine gewisse Grösse dA verändern.
also dA aus db, da zu finden, verfahre man
folgende Art.

. Weil $\sin \frac{1}{2} A = \frac{b}{2a}$ so ist

. $\log \sin \frac{1}{2} A = \log b - \log a - l 2$

. Mithin $d \log \sin \frac{1}{2} A =$
$g b - d \log a - d \log 2$

. Nun ist aus (Trig S. XLVII. 1), den vor-
n Winkel $a = \frac{1}{2} A$ gesetzt, $d \log \sin \frac{1}{2} A =$
$d A \cot \frac{1}{2} A$

. Ferner aus Trig S. XLVI (das dortige x
$= a$ oder $= b$ gesetzt) $d \log a =$
$\frac{B\,db}{b}$; $d \log b = \frac{B\,db}{b}$

. Weil die Zahl 2 als unveränderlich ange-
n wird, so ist $d \log 2 = 0$ (Trig S. XXX.)

. Die Werthe (6. 7. 8.) in die Gleichung
substituirt, und durchgängig mit B dividirt,
en

$$\frac{1}{2} d A \cot \frac{1}{2} A = \frac{db}{b} - \frac{da}{a} \text{ oder}$$

$$dA = 2\frac{db}{b} \text{ tang } \tfrac{1}{2}A \frac{2da}{a} t$$

10. Aus welcher Gleichung man Veränderung des Winkels A findet, w annimmt, daß die Seiten b, a, um d the db, da falsch gemessen worden wäre

Nur ist zu bemerken, daß der W hier in Decimaltheilen des Sin. tot wird; Verlangt man diesen kleinen Wi in Secunden, so muß man den Ausdr ter Hand des Gleichheitzeichens in (9) n der bekanten Zahl 206264 multipliciren.

11. Wenn nun nach dieser Berechn dA ein bejahter Werth herauskömt, so z ses an, daß der Winkel A um dA wächs a, b, um db, da, wachsen. Kömt d dA etwas negatives heraus, so will die gen, daß der Winkel A abnimmt, we a, b, um da, db verändern. (Trig S.

12 Wenn die Schenkel $CA = AB =$ tig gemessen worden wären, mithin da wäre, so hätte man bloß $dA = \frac{2db}{b}$ tan

13 Wäre aber $CB = b$ richtig gem und bloß die Schenkel CA, AB, um da z

zu klein gemessen worden, so hätte man db
, also bloß

$$dA = -\frac{2da}{a} \text{ tang } \tfrac{1}{2} A$$

Ex. Gesetzt, der Winkel A solte genau =
° seyn, und jeder Schenkel CA = AB =
Ruthen = 5000 Linien, so müste man CB
au = 2500 Linien nehmen. Ich will nun
n, man habe im Abstecken der Linien CA,
um 1 Linie, und eben so im Abstecken der
ge CB auch um 1 Linie gefehlet, und zwar
Seiten zu groß gemessen, so hätte man in
erer Formel a = 5000; b = 2500; da = 1
= 1; Dis gäbe demnach, den Fehler im
inkel A, oder

$$dA = \left(\frac{2}{2500} \text{ tang } 30° - \frac{bda}{\quad}\right.$$

$$\left.\frac{2}{5000} \text{ tang } 30°\right) 206264''$$

$$= \left(\frac{1}{1250} \text{ tang } 30° -\right.$$

$$\left.\frac{1}{2500} \text{ tang } 30°\right) 206264''$$

lches durch Logarithmen folgendergestalt berech-
t wird

log 206264 = 5,3144252
log tang 30° = 9,7614394—10

5,0758646
log 1250 = 3,0969100

1,9789546

Hierzu gehöret die Zahl $\frac{2db}{b}$ tang ½ A. 20

welche also 94″ beträgt; Eben so

log 206264 = 5,3144252
log tang 30° = 9,7614394—10

5,0758646
log 2500 = 3,3979400

1,6779246

Hierzu gehöret die Zahl

$\frac{2da}{a}$ tang ½ A. 206264″ oder 47″. E

also im gegebenen Exempel der Fehler im W
kel A oder dA = 94″ — 47″ = 47″

Es erhellet also, wenn in dem abgeste
Dreyecke jede Seite nur um 1 Linie zu gro
nommen worden wäre, bis im Winkel A s
einen Fehler von 47″ Secunden betr
würde.

Der Fehler könte aber noch weit beträchtli
werden, wenn man annähme, daß die Seite

r Linie zu groß, die Seiten CA, AB aber
r Linie zu klein gemessen worden wären;
für diesen Fall wäre in obiger Formel der
rth von da negativ, dis gäbe demnach

$$dA = \frac{2db}{b} \text{tang } \tfrac{1}{2} A + \frac{2da}{a} \text{tang } \tfrac{1}{2} A$$

bey den angenommenen Werthen

$dA = 94'' + 47'' = 141'' = 2'.21''$

Winkel A würde also da, um beynahe $2\frac{1}{2}$ Mi-
unrichtig und zwar zu groß werden.

4. Aus diesen Betrachtungen wird also zu-
end erhellen; wenn man die Seiten des
hschenklichten Dreyecks, nicht bis auf ein-
Linien genau abstecken kan, und das möchte
dem Felde wohl ziemlich schwer seyn, so ist
Winkel A auch höchstens nur innerhalb 2 bis
Minuten als richtig anzunehmen Voraus-
st daß A nicht grösser als etwa 60°, und
Schenkel CA, AB, 5 Ruthen groß genom-
werden; denn es erhellet, daß dA noch be-
tlicher würde, als in dem gegebenen Bey-
, wenn man den Winkel A grösser als 60°
a kleiner als 5 Ruthen nähme.

5. Je grösser man a, b, nimt, desto kleiner wer-
die Grössen $\frac{db}{b}$, $\frac{da}{a}$, für einer-
db, und da; desto kleiner wird also auch dA
der Fehler im Winkel A; Man könte also

glau

glauben, wenn man die Seiten des T
CA, und AB sehr groß machte, daß
der Winkel A mit grösserer Zuverläßigk
steckt werden würde: Allein man muß
gen, daß alsdenn bey Absteckung sehr l
nien auch grössere Fehler vorfallen, mi
Werthe von db, da, auch beträchtlich
den; folglich dem ohnerachtet in dem V
keine grössere Schärfe zu erwarten steh

V. Vorausgesetzt also, daß vermitt
bisherigen Verfahrens der Winkel A h
bis auf 2 Minuten genau abgesteckt wer
te; würde man, indem man A mit dem
zeuge mäße, wohl kleinere Fehler de
theilten Randes entdecken, als die, welch
halb 2 Minuten enthalten sind? Keines
wenn man auch sonst in Stellung des
zeugs und Beobachtung des Winkels noch
sichtig verführe, so bliebe man doch im
nerhalb 2 Minuten in der Prüfung des
auf dem Rande, ungewis.

In dem einzigen Falle wo A nicht seh
ist, z. E. nur 5 bis 10 Grad beträgt, läß
bisherige Verfahren einige Genauigkeit zu.
wenn man da auch kleine Fehler im Ab
der Linien CA, CB, AB, begienge, so würden sie d
Winkel A doch nicht so grossen Einfluß h
als wenn A z. E. 80 oder mehrere Grade

auch aus der für dA gefundenen Formel er-
et, wo offenbar dA abnimt, wenn A kleiner
).

Wenn man also nur einen kleinen Bogen des
ndes prüfen will, so mag man sich der bis-
gen Methode bedienen — In andern Fäl-
verstattet sie aber nie die gehörige Schärfe
leistet mit weit mehrerer Mühe kaum die
nauigkeit eines mäßig richtigen Stangenzir-
.

Anmerkung

§ 168. Die bisher beschriebenen Methoden
gen einigermaaßen zeigen, was man bey Prü-
g des eingetheilten Randes eines Winkelmes-
s zu beobachten hat — Man wird leicht
reifen, daß diese Arbeit oft mit ziemlicher
ühe verbunden ist, und eine sehr grosse Sorg-
des Geometers erfordert. Indessen kan ich
s Erfahrung versichern, daß die erwähnten
üfungsmethoden, mit einander verbunden,
er zum Endzweck führen, da ich so wohl bey
üfung geometrischer als astronomischer Werk-
ge mich derselben bedient habe.

Wie übrigens sowohl die gehörige Grösse des
ernierbogens, als auch die Abtheilungen des-
ben geprüft werden können, davon werde ich
weiter

weiter nichts beybringen, da einem jeden, bisherige wohl verstanden hat, und au weiß, leicht Mittel einfallen werden, die berichtigten Theilpunkte des Randes, zu tigung der Vernierabtheilungen zu gebr

Ob die Indices der beyden Vernier lungen in einer einzigen geraden Linie lieg durch des Werkzeugs Mittelpunkt gehen, kan man sich versichern, wenn man die an solche Theilstriche der beyden Abthei des Randes bringt, die vermöge der Nat ser beyden Eintheilungen, in eine gerad fallen müssen, dergleichen sind z. E. auf Theilung die Theilstriche

0, 16, 32, 48, 64, 80, 96 u. s. w.

welche mit folgenden Theilstrichen der 90 lung

0, 15, 30, 45, 60, 75, 90, u. s. w.

in der Ordnung, wie sie hier unter einande hen, in eine einzige gerade Linie fallen, wo gesetzt, daß die ersten beyden 0, 0, in einer zigen geraden Linie liegen; bringt man also Index des V. der 90 Theilung nach der nung an die Theilstriche 0, 15, 30 u. s. w. so der Index des V. der 96 Theilung, genau an Theilstriche 0, 16, 32 u. s. w. der 96 Theil. passen sen, wenn die Indices in einer geraden Linie

, und übrigens, wie dabey zum vorausge-
wird, die oberwähnten Theilstriche des Ran-
an sich nicht fehlerhaft sind, welches wo
bey allen, doch wenigstens bey den meisten,
er angenommen werden kan.

e man untersuchen könne, ob ein Win-kelmesser excentrisch sey.

169. Diese Untersuchung anzustellen, weiß
ein anderes Mittel, als daß man die Pro-
acht, ob der Bogen, der die Vernierplatte
änzt, von dem Bogen des eingetheilten Ran-
mmer gleich großen Abstand habe, mithin
Umdrehung der Alhidadenregel, dem Bogen
Randes vollkommen parallel bleibe. Den
and zwischen dem Vernierbogen, und dem
reis des Randes kann man sehr genau mit
n Haarzirkel fassen, und demnächst gar leicht
en, ob dieser Abstand in jeder Lage des Ver-
ogens durch den ganzen Umkreis des Win-
essers, sich immer gleich verbleibt.

eschiehet dieses, so wird sich die Alhidaden-
, um den wahren Mittelpunkt des Randes
en —

m Gegentheile aber, muß man durch Ver-
ausmachen, an welchen Stellen des Ran-
, der erwähnte Abstand am grösten oder
sten ist; dies giebt Mittel, die Gröss n

c, α (§. 96) ausfindig zu machen, mithi
einem excentrischen Werkzeuge jedesmah
nehmende Correction zu bestimmen.
mich aber bey dieser Untersuchung nich
aufhalten, weil ich dem Mechanico die
lichkeit zutrauen kan, die Bewegung d
badenregel um den wahren Mittelpunkt
stalten.

Wenn man aber ein Werkzeug selbst
will, so muß man vorher aus der Pl
einzutheilenden Winkelmessers das rund
(Fig. XIX) bohren lassen, in welches der
Zapfen (§. 99; 1) kömt, um den sich d
badenregel drehet — Nun lässet man
so grosses rundes Stück Messing R, in
Dicke mit der Platte des Winkelmessers,
dergestalt daß R genau die Oefnung O a
bestimmet hierauf durch einen feinen
genau den Mittelpunkt auf der Scheibe
wenn man nun den Umkreiß auf die Pl
Winkelmessers reissen will, so befestigt n
selbe durch ein paar Handschrauben, au
Tisch, oder sonst einer ebenen Fläche, s
dann die Oefnung O mit der Scheibe R a
reiset demnächst aus dem Mittelpunkt
Umkreis abchma des einzutheilenden
messers.

Auf diese Art kan man überzeugt sey
der Mittelpunkt des eingetheilten Rande

ich der Umdrehungspunkt der Alhidadenre-
eyn werde. Dieses Verfahren ist offenbar
wendig, weil es sonst kaum möglich seyn
, eine genaue centrische Bewegung der Als
enregel zu erhalten; Wolte man das Za
och O erst nachher bohren, wenn der Um-
des Randes schon gerissen, und getheilt
so wird man es nie ohne gross Mühe und
gfalt, dahin bringen, daß der Mittelpunkt
s Lochs, mit dem Mittelpunkte des einge-
ten Randes einerley sey.

iese nöthige Bemerkung, muß dem Ver-
n des 89 Jes noch beygefügt werden.

ebrigens ist die Untersuchung, ob ein Min-
esser genau centrisch sey, nothwendig vorher
unehmen, ehe man an die Prüfung der Ab-
ungen des Randes schreitet, denn man wird
begreiffen, daß bey einigen Prüfungsme-
n die centrische Bewegung der Alhidaden-
schlechterdings zum voraus gesetzt wird,
daß man wenigstens die aus der Excentri-
herrührenden Fehler, kennet, und sie nicht
Abtheilungen des Randes schuld giebt.

XIV. Kapitel.

Noch einige Mittel, besonders kleine kel auf dem Felde zu messen.

§. 170. Wir haben zwar bereits dene Mittel kennen kleinere Winkel zu bestimmen, als blos welche die Abtheilungen des Randes a hieher gehörten, Vernier, und Mic schraube.

Man pflegt aber oft, bey geometrische zeugen, eine besondere Gattung von Micr in die Fernröhre anzubringen, wie z. G Mechanicus Brander und andere Künstl wodurch sie ihren Werkzeugen ohnstreit noch grössern Grad von Vollkommenheit g Wenn man aber dergleichen Micromete nicht in das Fernrohr eines Winkelmes bringen will, weil dergleichen Fernröhr klein sind, so wird doch sonst ein ander seres Fernrohr ohne Verbindung mit eine kelmesser, mit einem dergleichen Microme sehen, bey Feldmesser arbeiten oft n großen Nutzen gebraucht werden können. ich kan daher nicht umhin auch kürzlich die wesentlichsten Begriffe beyzubringen.

orher muß ich aber einige dioptrische Lehnsätze
n man die Beweise in Hrn. H. Käſtn. angew.
h. findet, vorausſchicken.

Dioptriſche Lehnſätze.

171. I. Wenn man auf ein, auf beyden
en erhaben geſchliffenes Glas AB (Fig XXII),
ahlen, von verſchiedenen Punkten P, Q, ei-
gewiſſen Gegenſtandes, der von dem Glaſe
tfernt iſt, fallen läſt, ſo werden alle Strah-
ie z. E. von P auf das Glas fallen, ſich hin-
em Glaſe in einem beſtimmten Punkte p
nigen, und daſelbſt das Bild des Punktes
rſtellen; Auf eben die Art kommen alle
ahlen von Q, hinter dem Glaſe bey q zu-
nen, und geben daſelbſt des Punktes Q Bild;
so hat überhaupt ein jeder Punkt des Ge-
tandes PQ, hinter dem Glaſe AB, ſein ei-
s Bild; dergeſtalt, daß alle Bilder der ein-
Punkte eines Gegenſtandes PQ, hinter dem
ſe das ganze Bild deſſelben darſtellen wer-

Man kan ſich hievon durch eine leichte Er-
ung verſichern, wenn man in einem Zim-
, hinter das Glas AB in gehöriger Entfer-
g ein Blatt Papier hält; ſo werden ſich auf
ſelben, die Gegenſtände, die von auſſen Strah-
auf das Glas ſchicken, abmahlen, und
r verkleinert erſcheinen — Die gehörige
ite des Blatt Papieres muß man durch Ver-

suche ausmachen — Eben diese Erschei
sind die Gründe von der sogenannten K
obscura.

Diese Sätze gelten auch vom Planconv
und einem Nesnico. (Kästn. Diopt. 22.

Man wird zugleich bemerken, daß sich da
eines Gegenstandes, auf dem Papiere in
kehrter Lage darstellet, dergestalt, daß das
was an dem Gegenstande zu oberst ist, i
Bilde unten erscheinet, und eben so die
Seite des Bildes, der linken des Objec
gehöret.

II. Es läst sich leicht beweisen, daß, w
ein gewisser Punkt des Gegenstandes ist,
Bild p ohne merklichen Fehler in einer ge
Linie Pcp liege, die man durch P und des
ses c Mittelpunkt ziehet. Und eben so, d
in der geraden Linie Qcp liege, daß ferner
alle Bilder eines Gegenstandes PQ, ohne
thum ohngefähr in gleicher Weite hinter
Glase AB liegen.

III. Die Linie rcR die auf dem Glase
den Mittelpunct c senkrecht stehet, heist die
des Glases, und wenn der Punkt R des
jects in der Axe des Glases liegt, so wird
dessen Bild r sich in der Axe des Glases
finden.

7. Man wird ferner die Bemerkung ma-
, daß eines von dem Glase entferntern Ge-
andes Bild, näher hinter dem Glase liegt,
as Bild eines nahen Gegenstandes. Daß
das Bild der Sonne nicht so weit vom
e liege, als das Bild eines von dem Glase
twa um 50 Fuß entlegenen Objects.

Das Bild eines von dem Glase unend-
veit entfernten Gegenstandes, wird am
ten hinter dem Glase liegen, und die Stelle
Bildes heist der **Brennpunct** des Glas-
ie Weite desselben vom Glase, die Brenn-
e.

ie Bilder der Sonne oder Fixsterne, die
ohne Irrthum, als unendlich weit entlege-
bjecte ansehen kan, würden also hinter dem
, den Brennpunct, und folglich auch die
nweite angeben, die man daher durch Ver-
finden und messen kan. Sonst hängt aber
ie Brennweite, von der Krümmung des
s, d. h. von den Halbmessern der Kugel-
n ab, die die Gränzen des Glases bestim-
— Daher ein jedes Glaß seine eigene
nweite hat.

Herrn Hofrath Kästners Dioptr. (22) fin-
an eine Formel, welche die Brennweite,
en Halbmessern der Kugelflächen bestimmt,
s Glas auf beyden Seiten begränzen. Die

Dicke des Glases ist dabey nicht in Betr
gezogen, welches auch meistens beym G
der Gläser zu Fernröhren, verstattet ist.

VI. Wenn die Brennweite eines Glase
Versuche oder sonst als bekannt angen
wird, so kan man daraus die Weite des
eines vor dem Glase in endlicher Weite
den Objects, durch Rechnung finden.
nenne die Brennweite eines Glases =
Entfernung eines Objects von dem Glas
und die Weite dessen Bildes hinter dem
= f, so wird seyn

$$f = \frac{bl}{b - l}$$ (Kästn. Dioptr.)

Ex. Gesetzt es sey die Brennweite eine
ses l = 8 Zoll; b = 5 Fuß = 50 Zoll
f = $9\frac{1}{2}$ Zoll.

Es würde also das Bild eines um 50 Z
fernten Gegenstandes, um $1\frac{1}{2}$ Zoll weite
Glase liegen, als der Brennpunkt, od
Ort des Bildes, eines unendlich weit
genden Objects.

Für l = 8 Zoll; b = 1000 Zoll, w
= 8, 06 Zoll. Das Bild eines um
Zoll vom Glase entfernten Gegenstandes,

bey einer Brennweite von 8 Zollen, nur um
5 eines Zolles weiter vom Glase liegen als
Brennpunkt. — Da nun dieser Unterschied
geringe ist, so erhellet, daß man ohne
lichen Fehler, den Brennpunkt selbst, als
Ort der Bilder von solchen Gegenständen,
zwar nicht unendlich weit, sondern nur in
iger Entfernung vor dem Glase liegen, an-
n könne.

VII. Wenn PQ auf der Axe rcR senkrecht
et, so wird auch dessen Bild pq, auf der
senkrecht stehen.

VIII. Wenn man sich bey c ein Auge vorstel-
so siehet es den Gegenstand PR unter dem
nkel PcR Das wäre also die scheinbare
ösſe eines Gegenstandes, den man mit blos-
Auge, aus dem Punkte c betrachtete.

Wenn nun PR auf cR senkrecht angenommen
d, so kan man in dem rechtwinklichtem Drey-
pcr (VII) aus der gegebenen scheinbaren
ösſe PcR = pcr = α, und aus der Weite
des Bildes, hinter dem Glase, die Grösse
des Bildes finden. Denn wenn man rc = f;
= h nennet, so ist für den Sin. tot. = 1

rc: rp = 1 : tang rcp also

h = f. tang α.

Hieraus folgt, daß die Bilder gleic
entlegener Objecte, sich wie die Tan
der scheinbaren Grössen verhalten. Sin
die scheinbaren Grössen einerley, so verhal
die Bilder wie f, oder wie ihre Weite hint
Glase. Da nun f abnimmt, wenn des O
Weite vor dem Glase wächst (VI) so e
daß das Bild eines entferntern Gegens
kleiner sey, als eines nähern, von eben der
baren Grösse.

IX. Da alle Bilder sehr weit entlegen
jecte beynahe in den Brennpunkt fallen, (
kan man überhaupt $f = l$ setzen, und al
nehmen, daß, wenn eines Glases Bren
$= l$ ist, und die scheinbare Grösse, eine
Glase mäßig weit wegliegenden Objects
die Grösse des Bildes hinter dem Glase
werde $= l . \tang \alpha$.

X. Und wenn überdem, wie gewöhnli
Winkel PcR oder die scheinbare Grösse α
sehr groß ist, folglich ohne Fehler $\tang \alpha$
gesetzt werden kan, so wird seyn die Grös
Bildes $= l . \alpha$.

In den folgenden Betrachtungen, wer
nun immer zum Voraus setzen, daß das O
PR, so weit vom Glase liege, daß man

r die Weite des Bildes rc hinter dem Glas-
er Brennweite gleich setzen kan.

l. Es stelle nun LMAB die Röhre eines nach
erichteten astronomischen Fernrohres vor. AB
Objectiv, und mn dessen Ocular. Bey-
läser übrigens so gestellt, daß ihre Axen
ne gerade Linie fallen, und des Oculars
npunkt in des Objectivs Brennpunkt liege.
tn. Dioptrick.) So wird ein Auge O vor
Ocularglase mn, das Bild qp eines Ob-
QP, in dem Fernrohre sehen, und zwar
erkehrt 2) vergrössert, so daß dem Auge O,
Gegenstand QP in dem Fernrohre weit nä-
nd grösser zu seyn scheinet, als er demsel-
hne Fernrohr scheinen würde.

ie Vergrösserung hängt nun von dem
hältnis der Brennweite des Objectivs zur
nnweite des Oculars ab, und es läst sich
t darthun, daß eines Fernrohres Vergrösse-
herauskomme, wenn man die Brennweite
Objectivs mit der Brennweite des Oculars
irt. Nennet man also erstere $= l$, letztere

λ so ist des Fernrohres Vergrösserung $= \frac{l}{\lambda}$

Siehet daher das blosse Auge bey O den Ge-
tand QP, unter der scheinbaren Grösse φ,

so siehet es diesen Gegenstand durchs F
unter dem Winkel $\frac{1}{\lambda} \cdot \varphi = W$

Wäre eben so, eines anderen Gegen
QS, den man mit blossem Auge betra
scheinbare Grösse $= \psi$ so würde dessen s
re Grösse im Fernrohre $= \frac{1}{\lambda} \psi = w$.

Also $W : w = \frac{1}{\lambda} \cdot \varphi : \frac{1}{\lambda} \psi = \varphi :$

D h. die scheinbaren Grössen der Gege
durchs Fernrohr betrachtet, verhalten s
derselben scheinbare Grössen ohne Fe
so vielmahl folglich, dem bloßen Auge e
ject grösser aussiehet als das andere um
mahl erscheinet auch im Fernrohre das ers
ject grösser als das andere, vorausgesetzt
beyde Objecte weit genug vom Fernrohre r
gen, und folglich die Stellen ihrer Bilde
ohne merklichen Irrthum, mit dem Brenn
in gleicher Weite hinter dem Glase angeno
werden können.

XII. Es seyen QS, PQ ein paar Objec
dem Fernrohre und ihre scheinbare Grösse
$= \psi$; QcP $= \varphi$;

p ihre Bilder; OcR des Fernrohrs Axe,
cht auf PQ; l des Objectivglasses Brenn-
; so ist aus (X)
pr = l. PcR; qr. = l. QcR; rs = l. ScR
er
pq = pr + rq = l. (PcR + QcR)
pq = l. PcQ = l. φ
eben die Art
qs = qr + rs = l. (QcR + ScR)
qs = l. QcS = l. ψ
r pq : qs = l. φ : l ψ = φ : ψ
). die Bilder pq : qs, zweyer Objecte PQ, QS,
alten sich wie dieser Objekte scheinbare Grös-
oder wie die Winkel, QcP, QcS am Ob-
ivglase.

XIII. Bisher war PQ auf cR senkrecht ange-
mmen. Man nehme an, PV sey ein auf der
ängerten Axe des Fernrohres schief stehendes
jekt, p das Bild von P und q das Bild von
so wird auch q, das Bild von V seyn, wenn
Q, V in gerader Linie liegen; Denn obgleich
etwas weiter vom Fernrohre liegt als Q, mit-
das Bild von V etwas näher hinter dem
ase AB liegen muß, als das Bild von Q, so
n man doch den Unterschied völlig aus der Acht
sen, so bald Q, V, in beträchtlicher Weite
r dem Glase AB liegen, (IX) mithin ohne den

merk-

merklichsten Irrthum annehmen, daß auc
Bild von V, mithin pq, auch das Bild v
schiefstehenden Objekte PV sey, melches n
senkrechten PQ, gleiche scheinbare Grö
= PcV hat.

Hieraus wird also allgemein erhellen,
Grösse eines Bildes qp, bloß von dem
oder der scheinbaren Grösse PcQ abhängt
Objekt PQ mag nun auf der Axe des F
res senkrecht stehen oder nicht.

XIV. Aus (X. XI) folgt auch W:

$pq : qs = \varphi : \psi$

D. h. Die Bilder pq, qs, durchs O
glas betrachtet, erscheinen dem Auge n
der Verhältnis, der scheinbaren Grösser
QcS. Das Ocular ändert also in dem s
ren Verhältnis der Bilder nichts, ob es
jedes Bild vergrössert darstellet.

Wie man die bisherigen Sätze zur messung kleiner Winkel auf dem Fe gebrauchen könne.

§. 172. I. Weil die Bilder pq, qs, z
Objekte sich wie die Winkel PcQ, QcS v
ten, so erhellet, daß wenn man die Grösse
Bildes pq weis, das einem gegebenen W
$PcQ = \varphi$ zukömt, man aus der gegebenen G
eines andern Bildes qs den zugehörigen W

$= \psi$, durch folgende Proportion qp: qs

: ψ, woraus denn $\psi = \frac{qs}{qp} . \varphi$ folgt, be-

n könne.

setzt man wüste, daß, wenn die scheinbare
$\varphi = 60$ Min. ware, das zugehörige Bild
E. 50 Theile eines gewissen Maasstabes
so würde einem andern Bilde qs, das
12 Theile dieses Maasstabes faste, eine

bare Grösse oder ein Winkel ψ von $\frac{12}{50} . 60$

von $14\frac{2}{5}$ Minuten zugehören.

Es erhellet also, daß es nur darauf an-
ne, an der Stelle des Fernrohres, wo sich
bjecte abbilden, eine Vorrichtung zu tref-
wodurch sich bequem das Verhältnis der
er wie qs: qp bestimmen läst, und dann
einen Versuch ausfindig zu machen, wie
das Bild sey, dem eine gegebene scheinbare
se oder Winkel zugehört.

iese Absicht zu erreichen, hat man sich schon
anger Zeit der Schrauben bedient.

Wenn man sich vorstellet, das in der Gegend,
es Ocularglases Brennpunkt liegt, ein paar
rauben mit feinen Gängen, durch die Röhre
Ocularglases gehen, die man beyde ins Feld

des

des Fernrohres weiter herein und heraus
ben, und einander selbst bis zum Zusamm
sen nähern kan, so erhellet folgendes —
die Röhre des Ocularglases in die Röh
Objectivs so weit hinein geschoben worde
des Oculars Brennpunkt, und folglich a
erwähnten Schrauben, an die Stelle b
men, wo sich im Fernrohre die Gegenstä
bilden, so wird man zwischen beyde G
benenden das Bild eines Gegenstandes
und wenn man demnächst beyde Schraub
ander bis zum Zusammenstossen nähert, di
ge von Umdrehungen zählen können,
eines Gegenstandes Bild gehen. Sind n
Schraubengänge von gleicher Weite, so
sich die Grössen zweyer Bilder verhalten,
Mengen von Schrauben Umdrehungen
auf sie gehen, und so wird das Verhältnis
Bilder dadurch bekant seyn.

Die Vorrichtung selbst bestehet in einer
fingenen Ringe N (Fig XXIII) der in der G
des Brennpunkts vom Oculare, um die
des Oculars gelegt wird; Dieser Ring
beyden Enden eines Durchmessers durch
und daselbst mit Schraubenmuttern verseh
den Schrauben fh, lk, zugehören. —
mit man nun diese Schrauben in das Fe
Fernrohres herein und herausschrauben
so hat die Röhre des Oculars bey a, b, (Fig

Gegend des Brennpunkts gleichfalls ein
Oefnungen, wodurch alsdenn die Schrau-
h, lk gehen, nachdem der Ring um das
ohr gelegt worden. Uebrigens müssen die
aubengänge so wohl auf fh als lk genau
eitet und so viel als möglich gleiche Weite
, damit man die Umdrehungen der einen
aube, zu der andern ihren rechnen könne,
sie alle an einer Schraube wären.

, sind ein paar Scheiben, mit Abtheilungen
hen, damit man durch Hülfe der Weiser
die an den Köpfen der Schrauben fh, lk,
igt sind, Theile von Umdrehungen zählen
.

I. Gesetzt nun, nachdem die bisherige Vor-
ung gehörig um das Fernrohr gelegt wor-
so werde das Objekt PQ durch dieses Fern-
betrachtet. pq sey das Bild von PQ, und
Schrauben in der Gegend dieses Bildes. Man
ube sie so weit ins Feld des Fernrohrs, daß
chen ihren beyden Enden das Bild qp des
ekts QP erscheinet; Damit man nun finde,
viel Umdrehungen, auf die Grösse des Bil-
qp gehen, so schraube man beyde Schrau-
fq, lp weiter herein, bis sie zu ammenstoss
Sind nun zu dieser Absicht bey dem Bil-
qp z. E. 24 Umdrehungen, und auf eben die
bey einem andern Bilde qs 20 Umdrehun-

gen

gen nöthig, so ist das Verhältnis der
Bilder qp: qs = 24: 20.

In eben der Verhältnis stehen nun a
diesen Bildern zugehörigen scheinbaren
PcQ; ScQ;

IV. Wüste man nun z. E. die scheinbar
se, die einer Umdrehung der Schrauben
hörte, so hätte man demnächst gar lei
scheinbare Grösse eines Objekts, dessen
eine gewisse Menge von Umdrehungen z

Um nun den einer Umdrehung zugeh
Winkel zu finden, giebt es verschiedene

Den Werth der Umdrehung aus der B
weite des Objectivs und der Weite
Schraubengänge zu finden.

§. 173. Gesetzt die Schraube f h oder l
XXIII) halte in der Länge eines Zolles, o
ner andern Länge die ich = a nennen w
ne gewisse Anzahl von Schraubengängen,
heissen mag, so ist die Weite eines Schra

ganges = $\frac{a}{n}$, vorausgesetzt, daß alle
ge gleich weit sind.

Es sey nun Fig XXIV, vw, die Weite Schraubenganges, und bey w des Obje- Brennpunkt; c das Mittel des Objectivs so gehöret diesem Schraubengang vw, oder Bilde dessen Grösse der Weite eines Schrau- ngs gleich wäre, eine scheinbare Grösse = xck zu.

eist also die Brennweite des Objectivs = l, leine Winkel vcw = α; so ist (§. 171. X) = l. α

ber auch $vw = \frac{a}{n}$ (I) daher $\frac{a}{n} = l. \alpha$;

ch $\alpha = \frac{a}{n. l}$; woraus man also die schein- Grösse α findet, die der Weite eines Schrau- anges, oder einer Umdrehung der Schrau- gehöret.

abey ist aber zu erinnern, daß man den $\frac{a}{n. l}$ noch mit der Zahl 206264 multi- en müsse, um α in Secunden zu finden;

$$\alpha = \frac{a}{n. l}. 206264 \text{ Secunden.}$$

Ex Gesetzt es sey die Brennweite l =
reinl. Zolle, die Schraube halte in einer
= a = 1,69 reinl. Zolle, n = 45,5
so ist, wenn ich 206264 = e nenne

log a = 0,2278867; log n = 1,6
log e = 5,3144251; log l = 1 8

log a. e = 5,5423118; log n. l = 3,55
log n. l = 3,5537668

log α = 1,9885450; Daher α =
mithin betrüge ein Schraubengang oder der
einer Umdrehung 1'. 37'',39

Dis Exempel befindet sich in H H.
Astron. Abh. II Saml. pag 313 und geh
einem Fernrohre, mit einem dergleichen
benmicrometer. welches Hr Opt. Bau
verfertigt hat.

Den Werth einer Umdrehung aus
scheinbaren Grösse eines Gegenstande
zu finden, dessen Entfernung cR = b,
Objective bekant ist.

§. 174. I. Es sey PQ ein auf dem Felde
tical aufgerichteter Stab in ziemlich betr
cher Weite von dem Objective; die Ax
Fernrohrs sey nach dem Augenmaasse hori
nach PQ gerichtet dergestalt, daß man
Irrthum das Dreyeck PcQ als gleichschen

ben, und Pc=Qc=Rc=b setzen kan. Der
b PQ sey von P nach Q in Zolle u. s. w. ein-
eilet; pq im Fernrohre das Bild von PQ,
die Schrauben so weit hereingeschroben, daß,
Bild pq, zwischen beyden Schraubenenden
alten ist.

Man untersuche nun, wie viel Schraubengän-
diesem Bilde qp zugehören, welches dadurch
iehet, daß man die Schraubenumdrehun-
zählt, die man nöthig hat, beyde Schrau-
nden einander bis zum Zusammenstossen zu
rn. Ich will also setzen, dem Bilde pq ge-
auf dem Stabe eine Grösse PQ von m Zol-
, und man habe n Umdrehungen gezählet, bey-
Schraubenenden einander um die Entfernung
n nähern. Weil nun der Winkel PcQ im-
nur klein ist, so kann man ohne merklichen
er PcQ oder die scheinbare Grösse

$$\varphi = \frac{PQ}{Rc} = \frac{m}{b}$$

(die Weite Rc=b nemlich auch in Zollen
edrückt.) Aber dem Bilde pq, folglich der
nbaren Grösse pcq, oder PcQ gehören n Um-
ungen der Schraube zu — Also ist der

$$\text{th einer Umdrehung} = \frac{\varphi}{n} \text{ oder } = \frac{m}{b.n} 206264$$

nden, nemlich an der Stelle, wo

des Gegenstandes PQ Bild pq liegt, i
sich in dem Fernrohre auch die Schrauben
den müssen.

II. Da aber der Ort des Bildes pq
immer genau in eine und dieselbe Ste
Fernrohres fällt, sondern weiter oder näher
Objectivglase liegt, nachdem PQ näher od
fernter ist (§ 171 IV.) folglich auch für e
scheinbare Grösse, die Länge Bildes desto
oder kleiner ist, je weiter oder näher es hint
Objectiv fällt, so erhellet daß auch der
gefundene Werth einer Umdrehung, nich
ne einigen Fehler zu begehen, für alle mö
Bilder gelten kan, sondern nur für solch
zu Objekten gehören, die in der Weite
dem Objektive liegen — Um aber do
nöthige Genauigkeit zu beobachten, und
nach (I) gefundenen Werth einer Umdrehun
für Bilder zu gebrauchen, die in jeder
Weite hinter das Objectivglas fallen, so
ich noch folgendes kürzlich beybringen.

II. Gesetzt (Fig XXV) das Bild eines
ferntern Gegenstandes, den ich M nennen
liege in der Weite cW = λ, und das Bild
nähern Gegenstandes N, in der Weite cz
hinter dem Objectivglasse —

Will man nun, um die Objecte M, N, je-
ahl vollkommen deutlich in dem Ferne-
zu sehen, die Röhre des Ocularglases so
in die Röhre des Objectivs schieben muß,
des Oculars Brennpunkt, an die Stellen
, hinfällt, wo der Objecte Bilder sich be-
n, so erhellet, daß auch die Schrauben
Micrometers sich jedesmahl an den Stellen
Bilder w, z befinden werden, indem sich
Schrauben im Brennpunkte des Oculars
den, mithin sich mit der Röhre des Oculars
ich verschieben.

Man gedenke sich also bey w, z, die Weite
Schraubenganges $wv = zy$; so gehöret der
eine scheinbare Grösse vcw der yz aber
scheinbare Grösse ycz zu. Da nun
$= zy$ aber $cz > w$, so wird auch der Win-
vcw grösser seyn als zcy, und zwar ohne
lichen Irrthum in dem Verhältnis cz : cw
L : λ. Woraus also erhellet, daß der
th eines Schraubenganges, oder einer Um-
ung, d i die dem Schraubeng. zugehörige
nbare Grösse ycz, oder vcw, von dem Orte
Bilder z, w, hinter dem Objektive, abhänge

Benennet man also die scheinbare Grösse vcw,
den Werth eines Schraubenganges vw, der
der Weite $cw = \lambda$ vom Objective abstehet,
dem Buchstaben γ, und den Werth ycz eines
raubenganges yz der sich an der Stelle ei-

nes um cz = L vom Objektive entfernten
z befindet, mit dem Buchstaben δ, so i

$= L : \lambda$ daher $\delta = \frac{\lambda}{L} \cdot \gamma$

III. Gesetzt also bey dem Versuche (I
das Bild qp (Fig XXII) des Stabes PQ
Weite cr = λ hinter dem Objektive geleger
der Werth eines an der Stelle dieses Bild

findlichen Schraubenganges sey $\gamma = \frac{m.20}{b.}$

gefunden worden, (I) so wird der Werth
Schraubenganges an dem Orte eines um
Abstand L vom Objective entfernten Bi

$= \frac{\lambda}{L} \cdot \gamma$ seyn; woraus man also gar leicht,

man nur jedesmal die Weite L des Bildes
Objective weis, an der Stelle dieses Bilde
W rth eines, und folglich auch einer jeden
von Umorehungen finden kan, vorausgesetzt
man durch einen Versuch wie in (I) ein fü
lemahl den We th γ eines Schraubenga
weis, der in der Weite = λ vom Objective

IV. Gegenstände die sehr weit wegliegen
ren Bilder fallen in den Brennpunkt des
jectivs, für die ist also L = l wenn l die Bre
bedeutet — Also ist der Werth eines Sch
henganges, an dem Orte der Bilder sehr

zener Gegenstände $= \frac{\lambda}{l} \cdot \gamma$ den ich $= r$

n will.

ey dem Versuche (I) habe nun das Objekt
der Stab PQ um b Zolle vor dem Objektivs
gestanden, so ist $\lambda = \frac{bl}{b-l}$ (§. 171. VI) also $r =$
$\frac{m\ 206264}{n.(b-l)}$ Secunden. (III) Aus
Gleichung findet man also vermittelst ei-
Gegenstandes, der in der Weite b vor dem
ctive stehet, den Werth r eines Schrauben-
es, für Bilder sehr weit entlegener Gegen-
e, für Bilder also, die in den Brenn-
fallen.

Bey dem Fernrohre §. 173. hatte Hr. H.
ner Astron. Abh. II Saml. p. 328) gefun-
daß auf einem verticalen um 15921,25
ger Zoll von dem Objektivglase entfernten
e, eine Länge PQ von 110,6 Leipziger Zoll,
Bild machte, dem in dem Fernrohre 14 +
– Umdrehungen der Schraube zugehörten.

ist bey diesem Versuche $m = 110{,}6$; $n = 14 + \frac{88{,}75}{6}$; $b = 15921{,}25$; $l = 78{,}66$
Zoll $= 87$ Leipz Zoll; folglich $b - l =$
4,25 Leipz. Zoll, mithin

$$r = \frac{6.110{,}6 \cdot 206264}{88{,}75 \cdot 15834{,}25}$$

dies giebt nach gehöriger Rechnung

den Logarithmen des Zählers = 8,1

des Nenners = 6,1

demnach log r = 1,98

mithin $r = 97'',4 = 1'.37'',4$ welches se

nau mit dem Versuche des 173 §. übereinst

V. Man könte nun aus dem Werthe Umdrehung, für Bilder die in des Fer Brennpunkt fallen, gar leicht den Werth Menge von Umdrehungen ein für allema rechnen, und davon eine Tafel verfertigen; man nun vermittelst des Fernrohrs, sche Grössen sehr weit entlegener Gegenstände, fen wolte, so dürfte man nur, durch Ve bung der Röhre des Oculars, die Schr in den Brennpunkt des Objectivs bringen, dann zusehen, wie viel Umdrehungen dem de des sehr weit entlegenen Objekts zukäm Die gefundene Menge von Umdrehungen i Tafel aufgesucht, gäbe sogleich ohne w Rechnung die zugehörige scheinbare Grösse

Es verstehet sich, daß man nicht nöthig mehrere Vielfache einer Umdrehung zu be nen, als erfordert werden, den grösten W zu erhalten, den man etwa im Fernrohre sehen kan.

. Da diese Tafel nur die scheinbaren Gröſ-
r Bilder giebt, die in des Fernrohrs Brenn-
fallen, also in der Weite = l vom Objek-
iegen, so hat man noch eine besondere
nung nöthig, wenn nahe liegender Gegen-
e; deren Bilder also nicht in den Brenn-
fallen, scheinbare Grössen gemessen werden

Wenn der Werth eines Schraubenganges
n Bild im Brennpunkte, r heist, so ist der
th w eines Schraubenganges, an dem Ort
Bildes, das die Entfernung L vom Ob-
e hat = $\frac{l}{L}$ r. Wenn also das Bild
nahe vor dem Fernrohre liegenden Objekts,
Weite L hinter dem Objektive hat, und μ
rehungen auf dasselbe gehen, so ist ihr
th oder die zugehörige scheinbare Grösse

$$\mu . w = \frac{l}{L} \cdot \mu . r$$

D. h. Man hat nur nöthig, den Werth dies
gefundenen Menge von Umdrehungen in der
el (V) aufzusuchen, und denselben mit dem
uche $\frac{l}{L}$ zu multipliciren, um die scheinbare
öſſe des Objekts zu finden, dessen Bild nicht
den Brennpunkt fällt.

VII. Eine Schwürigkeit scheinet es z
in jedem Falle ein leichtes Mittel zu habe
Ort des Bildes also die Weite L zu find
dieses Mittel bestehet nun darinnen.

Man untersuche, und bestimme ein fü
mahl durch ein an die Röhre des Fernroh
XXII) bey h gemachtes Zeichen, wie wei
die Röhre des Oculars in die Röhre de
jektivs schieben muß, um unendlich weit
genstände (z. E. die Sonne) vollkommen
lich und begränzt zu sehen. In diesem
fällt das Bild in den Brennpunkt des Obje
und die Schrauben kommen durch die gesch
Verschiebung der Ocularröhre, gleichfall
diese Stelle.

Da man nun in dieser Stellung der G
nahe Gegenstände nicht vollkommen deutlic
hen wird, sondern die Röhre des Oculars
ter herausschieben muß, so untersuche man
wie viel die Röhre des Oculars weiter heraus
schoben werden muß, um ein nahes Objekt z
PQ, dessen scheinbare Grösse man messen w
vollkommen deutlich zu sehen — Man
also nur zusehen, wo sich bey i die Röhre
Oculars endigt, nachdem sie zureichend hera
gezogen worden, nnd den Raum ih messen,
drükt ih aus, um wie viel das Bild eines na
Gegenstandes weiter vom Objektive fällt,

Bild eines sehr weit entfernten. Nennt
also ih = x die Brennweite des Objectivs
so ist L = l + x also in (VI) μ. w =

. μ. r.

II. Ist das Objekt dessen scheinbare Grösse
die Menge von Schrauben Umdrehungen
sen werden soll, nur einigermassen weit vom
tive entfernt, so kan man ohne merklichen
$\frac{l}{L}$
in (VI) L = l also = 1 setzen, folg-
hne weitere Multiplication die scheinbare
e sogleich aus der Tafel (V) nehmen.

andere Vorrichtung die Grössen der
der, oder vielmehr ihre zugehörigen
scheinbaren Gr. zumessen.

175. I. Es sey Fig XXVI xυyz ein messin-
Ring, oder eine Röhre, die ein eben ge-
enes Glas umfasset. Diese Röhre kan in
öhre des Ocularglases geschroben werden,
z die Ebene des Glases xυyz in den Brenn-
des Oculars zu liegen kömmt, und übri-
auf der Axe des Fernrohrs senkrecht stehet.

uf diesem ebengeschliffenem Glase, ist
ziemlich nahe nebeneinander, eine ganze
e von sehr zarten Parallellinien gezogen, die

von

von einer senkrechten uz durch den Mittelp
durch chnitten werden. Die Entfernungen
Parallellinien müssen mit aller möglichen
sicht einander gleich seyn.

So erhellet, daß diese gleichweit von
der abstehenden Parallellinien, eben das m
ringerer Mühe leisten werden, was uns in
hergehenden die Schraubengänge nützten.
wird nemlich, nachdem dieses Glas mit P
lellinien durch gehörige Verschiebung der
larröhre, an den Ort gebracht worden, w
die Bilder entlegener Objekte versammlen,
die Menge dergleichen Theile, die ein solches
wie qp auf dem Glase xuyz einnimmt, die
sem Bilde zugehörige scheinbare Grösse fi
vorausgesetzt daß man weiß, wie viel Mi
und Secunden, dem Abstande zwoer näch
einander folgenden Parallellinien zugehören
setzt zwischen q, p fielen 20 gleiche Theile,
einem Theile auf dem Glase, gehöre eine sc
bare Grösse von 1′ zu, so würde dem Bilde
und folglich dem zugehörigen Objecte eine sc
bare Grösse von 20 Minuten zukommen. Kle
Theile, als diejenigen sind, welche unmitte
auf dem Glase verzeichnet worden, muß
nach dem Augenmaaße schätzen, welches ei
einigermasen geübten nicht schwer seyn wird
ohnedem die Abtheilungen durch das Ocular
vergrössert erscheinen.

Es kömt also nur darauf an, den Abstand nächsten Parallellinien zu finden, nemlich inuten und Secunden.

erzu kan man sich nun völlig eben der Me- n bedienen, die wir in vorhergehenden §§ nterſuchung des Werthes eines Schrauben- s, gelehrt haben. Man darf nur in obi- §§ statt der Wörter Schraubenumdres , Menge von Schraubenumdrehun- nur die Wörter Zwiſchenraum oder Ab- zwoer nächſten parallelen; Menge Zwiſchenräumen u. ſ. w. ſetzen, ſo wird gar leicht einſehen, wie alle vorhergehen- Regeln, ſich auch auf dieſe Parallellinien nden laſſen.

l. Es bedeute die Linie ik den Abſtand der en äuſerſten Parallelſtriche, l die Brenn- des Objectivs, ſo gehört dieſer Weite ik

ſcheinbare Gröſſe von $\frac{ik}{l}$. 206264 Secun-

zu, die ich $= \alpha$ nennen will. In wie viel he Theile muß man ik theilen daß einem le eine ſcheinbare Gröſſe von β Secunden mme? Man nenne die unbekannte Zahl der

lle $= x$ ſo ſoll ſeyn $\frac{\alpha}{x} = \beta$, oder $\frac{ik}{l.x}$.

$264 = \beta$; dis giebt $x = \frac{ik}{l.\beta}$ 206264.

Er-

Er. für $\beta = 60'' = 1'$ wäre $x = \frac{ik}{}$

dis dient also gleich anfangs bey Verzei
eines solchen Micrometers, dem Zwischen
zwoer nächsten Parallelen ohngefähr eine
bare Grösse von 1 Minute zu verschaffen
dis ist eine schickliche Grösse für den A
zwoer nächsten Parallelen, so bald das Fe
nicht unter 5 Fuß ist. Bey einer geri
Grösse des Fernrohrs kommen aber die Pa
striche zu nahe neben einander, wenn ihr
schenraum nur eine Minute betragen soll.

Es verstehet sich daß neben die Parallel
Zifern zu stehen kommen, damit man jedes
ohne sich zu irren, die Anzahl der Zwischenr
zählen kan, welche ein Bild einnimt.

Anmerkungen über die bisherigen Gattungen von Micrometern.

§. 176. I. Die erste Gattung von M
metern, bey der man sich der Schrauben bedi
die dem Bilde eines Objeckts zugehörige sc
bare Grösse zu finden, rühret von Christf
Kirch einem deutschen Astronomen her, de
zuerst in den Misc. Berolinensibus bekannt
macht hat. Die Vorrichtung ist zwar sehr
fach, aber das Umdrehen der Schrauben,
Zählen der Umdrehungen u. s. w. verurs

man sich nicht dabey irren will, einigen
rlust

Die letztere Art von Micrometern mit
ellinien, ist von meinem Vater zuerst in
Kosmograph. Sammlungen bekannt
ht worden, und ist ohnstreitig in der leich-
Behandlung, und auch in Absicht der Ko-
dem Kirchischen vorzuziehen Anitzt ver-
dergleichen Glasmicrometer in sehr grosser
mmenheit, Hr. Mech. Brander in
urg, und bringt sie auch in die Fernröhre
inkelmessern an, wo man vermittelst ihrer,
Vernier oder Micrometerschraube an der
adenr. ersparen kan. Bey Horizontalver-
gen wird nemlich ein solches Micrometer
Fernrohr des Winkelmessers so angebracht,
estellt, daß die Linie v z Fig. XXVI mit
bene des Werkszeugs parallel ist, und
h die Parallelen des Glasmicrometers, in
Fernrohre als Verticallinien erscheinen,
m das Werkzeug horizontal gestellet wor-
t Gesetzt also bey Ausmessung eines Ho-
alwinkels CAB Fig. XXI habe bey der Rich-
CA des Fernrohrs der Index auf dem
e o° gewiesen; nachdem aber die Alhida-
el herumgedrehet, und die Mittellinie x y
Micrometers Fig. XXVI, genau nach dem
te B Fig XXI gerichtet worden, weise der
r auf dem Rande 60° + einer gewissen An-

zahl

zahl von Minuten ꝛc. Um diese Zahl von Mi
zu finden, so bringe man durch eine sanfte Ve
kung der Alhidadenregel, den Index genau a
Theilstrich 60°, und sehe dann zu, hinter we
oder zwischen welchen Parallelen des Glasn
meters alsdann das Objeckt B in dem Fern
erscheinet. Ich will setzen B erschiene nac
geschehenen Verrückung der Alhidadenregel,
dann hinter einer Parallele, die um 8 Zwi
räume von der Mittellinie des Micrometer
fernt wäre, so würde, wenn jeder Zwischen
2 Minuten betrüge, der Winkel CA
60° + 2.8 Min. = 60° 16′ seyn.

Auf diese Art ersparet Hr. Brander an
Winkelmesser sowohl den Vernier als Mic
terschraube; es haben aber dergleichen A
meter vorzüglich noch ihren Nutzen in der
vom Nivelliren, und den dabey gebräuch
Instrumenten.

IV. Die nothwendigste Erforderniß i
daß 1) die Linien auf dem Glase vollko
parallel, 2) überal gleich weit von einande
und 3) so zart auf dem Glase verzeichne
daß ihre Dicke nicht nachtheilig ist.

Durch diese drey Vollkommenheiten z
sich die Branderischen Micrometer, v
lich aus.

Die zwote Bedingung, daß die Zwischen-
der Parallelen vollkommen gleich seyn
, ist indessen nicht unumgänglich noth-
; nur muß man vermittelst eines Zirkels
derer Vorrichtungen, die kleinen Ungleich-
der Zwischenräume zu entdecken suchen,
e Tafel darüber verfertigen. Die beste
ses zu bewerkstelligen ist folgende. Es
XXVI. ki die eingetheilte Mittellinie des
neters, und ka, ab, bc u. s. w. die Zwischen-
der Parallelen. Man messe nach einem
nau eingetheilten Maasstabe, die Weiten
, ke, kd u. s. w. so ist kb — ka = ba;
kb = bc, u. s. w. Diese Unterschiede
demnach zeigen, ob die Zwischenräume
:c. einander gleich sind. Nun verfer-
n eine Tafel, für die denen Zwischen-
ka, kb, kc u. s. w. zugehörige
von Minuten und Secunden. Dies
et wenn man nach der Ordnung die Wei-
, kb, kc u. s. w. mit des Objectivs
veite dividiret, und die herauskommenden
nten mit der Zahl 206264 multipliciret.
em nun die Zahlen gehörig geordnet wor-
o wird man vermittelst dieser Tafel die
e scheinbare Grösse eines Bildes auf fol-
Art finden. Gesetzt auf dem Micrometer
ein gewisses Bild den Raum bd ein, oder
ne zwischen den beyden Parallelen durch
. Man suche aus der Tafel, die denen

Zwischenräumen kb, kd, entsprechende M
von Minuten und Secunden. Ich will setze
Tafel gäbe kb = 8′ 20″; kd = 21′ 4
wäre der Unterschied kd — kb = bo
12′. 44″ = der scheinbaren Grösse des Bi

VI, Die erste und dritte Bedingung eine
ten Micrometers (IV) ist aber desto wich
und erfordert alle Aufmerksamkeit des Mech
Man kan zwar versuchen vermittelst einer
mantspitze, oder eines Splitters von e
Feuersteine die Parallelen auf das Glas zu re
Allein da die Linien durch dieses Verfahren
immer unrein werden, so hat mein Vater
Vorschlag gethan die Linien bloß mit Tusch
das Glas zu verzeichnen. Es wird zu
Absicht die eine Seite eines Glases mit
Tusche überall gleichförmig bestrichen, und
dem es troken geworden, mit Wachs auf e
Tische befestigt, so daß die geschwärzte
oben zu liegen komme. Hierauf werden
einem Federkiele, der wie zum Schreiben
ohne Spalt geschnitten ist, längst eines
legten Parallellinials Streifen von der erm
ten Tusche dergestalt weggenommen, daß
feine Parallellinien von Tusche, so weit von
ander, als die Spitze der Feder es mit
bringt, stehen bleiben.

Ich habe bey Verfertigung solcher Micron
das Glas nie ganz mit Tusche überstrichen,
dern nur mit einer guten Reisfeder,

dicke angemachter Tusche gefüllt war,
nien, so zart es angieng, auf das Glas
, und dann, wenn einige etwas zu dick
allen seyn solten, mit dem oberwähnten
iel, wieder so viel Tusche von ihnen weg-
men, daß sie die gehörige Feinheit erhiel-
Man muß aber beym Ziehen der Linien, mit
isfeder etwas geschwind längst des Linials
en, und nicht zu stark aufdrücken; dann
ieses Verfahren oft so zarte Linien geben,
kaum nöthig ist, Tusche wieder davon
reichen.

Tuschlinien hängen übrigens an dem
ziemlich fest, daß man nicht zu besorgen
ß sie sich so leicht wieder wegwischen, wenn
ur das Glas vor Feuchtigkeit aufbewahrt.

Die Linien die Hr. Mech. Brander, ver-
ines ihm eigenen Kunstgrifs auf das Glaß
sind so fein, daß ihre Breite kaum $\frac{1}{200}$
nie beträgt, und daher dem bloßen Auge
ichtbar sind. Dies läst vermuthen, daß
nien wohl schwerlich mit einem Diamant
euersteinsplitter ins Glas gerissen werden.
rmuthe vielmehr daß Hr. Brander etwa
er scharfen Spitze von gehärteten Stahl,
nst auf eine ähnliche Art, so breit als die
werden sollen, nur dem Glase die Politur
nt.

Ich habe mit einem bloßen Federmesser, aber nicht wie gewöhnlich sich in eine Spitze digt, sondern durchaus gleich breit ist, d Klinge von feinem Stahle und sehr scharf schliffen ist, in Ermangelung anderer Vor tungen die feinsten und reinsten Linien auf gende Art aufs Glas gezogen. Nachdem ein Linial gehörig aufs Glas gelegt hatte bestrich ich die Stelle des Glases, wo die längst des Linials eingerissen werden solte, angefeuchteten Kaput mortuum, oder auch derjenigen feinen Masse, welche sich von e zarten Schleifsteine abschleifet, wenn man Federmesser darauf abziehet; legte hierau das Linial genau die breite Seite des F messers, und fuhr, bey einem gelinden D mit der scharfen Ecke des Federmessers l des Linials immer langsam über das Glas und her, so aber daß die breite Seite des fers immer genau an dem Liniale liegen Nachdem ich nun etwa 15 bis 20 mahl das Glas hin und her gefahren hatte und Glas abwischte, so hatte sich die feinste auf der polirten Ebene des Glases matt ge fen. Die Uebung wird nun hiebey die nöth Vorsichten und Vortheile zeigen. Ich vermittelst dieses Verfahrens in ein Hrn Kästner gehöriges Fernrohr auf dem Observa ein Micrometer verfertigt, welches an Fei der Linien, den Branderischen Micrometern n nachgiebt.

ey Verfertigung solcher Micrometer, hatte
ufangs die Parallelen, die auf das Glas
ien solten, in Ermangelung anderer
ichtungen blos auf Papier verzeichnet,
Glas über diese Linien mit Wachs befestigt
dann die durchs Glas scheinenden Linien
Papiers nach der gewiesenen Methode, auf
olirte Ebene des Glases gebracht. Da aber
n einer Parallaxe, die durchs Glas schei-
n Linien auf das Glas selten in vollkom-
gleicher Weite gezogen werden können, so
ich mich nachher eines Instruments bedient,
ch auf dem hiesigen Observatorio befindet,
von der Einrichtung ist, daß über die Ebene,
uf das Glas gekittet wird, vermittelst einer gu-
Micrometerschraube, ein Linial, sich beständig
lel, und um jeden kleinen Raum genau fort-
oben werden kan.

ebrigens muß man bey dem bisher gewiesenen
fahren hauptsächlich einen gleichförmigen
g des Messers beobachten, und davor sorgen,
sich das Linial nicht verrücket (zu welcher
cht es gut ist, demselben gehörige Unterlagen
eben). Auch muß man vor dem Einschlei-
jeder folgenden Linie, dem Messer wieder
nöthige Schärfe geben — alsdenn wird man
s mit wenig Mühe und Kosten ein sehr gu-
Micrometer erhalten.

VIII. Die Kürze in die ich mich einschrä
muß, erlaubt mir nicht, mich umständlicher i
Lehre von Micrometern, zum Gebrauche
Feldmeskunst, einzulassen. — Man kan
die vollständige Theorie davon, wie auch
nöthige Vorsichten dabey, weitläuftiger un
der Hrn. H. Kästner eigenen Gründlichke
dessen Astronomischen Abh. II Saml.
Abh. auseinander gesetzt finden.

XV. Kapitel.

Von Ausmessung zugänglicher und u gänglicher Linien auf dem Felde.

§. 177. Die Ausmessung gerader Li
die ich im ersten Theile
zeigt habe, beziehet sich nur auf solche Er
nungen, an die sich ohne beträchtliche Hinder
der Maasstab anlegen läst.

Es kan aber sehr oft vorkommen, daß en
der die auszumessenden Linien zu lang
folglich die Messung zu weitläuftig würde,
daß sich Hindernisse vorfinden, die keine un
telbare Anlegung des Maasstabes zulassen.
In diesem Falle reicht uns die Geometrie
Hülfsmittel dar, auch ohne würkliche Anleg

Maaßstabes, dergleichen unbequeme Linien
sen.

rzu dienet nun besonders die Lehre von der
heit und Aehnlichkeit der Dreyecke, die
ey meinen Lesern voraussezе — und
gut ist, daß Anfänger sich vorher in Mes-
er Weiten üben ehe sie zu zusammenge-
Operationen fortgehen, so werde ich in
Kapitel unterschiedene Methoden beybrin-
die dergleichen einfache Operationen vorzu-
n sind.

ist klar, daß ich hier nur die wichtigsten
vortragen kan, und die in der Ausübung
ers oft vorkommen. — Es würde eine
liche Arbeit seyn, alle Fälle die sich auf
felde gedenken lassen, abzuhandeln. In-
wird man sich leicht in allen Schwierigkei-
helfen wissen, wenn man sich die Vor-
en des gegenwärtigen Kapitels wohl bekant
ht hat.

braucht wohl keines Beweises, daß eine
dieselbe Aufgabe sich auf sehr viele Arten
sen läst. Es wird aber nach Verhältniß
mstände bald diese bald jene Auflösung vor-
h bequem seyn. So ist es in manchen
n vortheilhaft sich bloß der Meßkette zu be-
n; in andern Fällen ist die Auflösung vers
lst des Meßtisches, des Astrolabii, der

Boussole, u. s w. vorzuziehen, und die einer Aufgabe verbundenen Nebenumstände m entscheiden, welche Auflösung die beste leichteste ist.

Die Hauptsache bey Messung der Weiten dem Felde, kömt darauf an, daß man sich Dreyeck oder eine andere Figur gedenkt, vo die zu messende Entfernung ein Stück ist, man nun an diesem Dreyecke oder Figur so Dinge misset, als man nöthig hat, daraus unbekante Grösse, entweder durch Konstru oder Rechnung ausfindig zu machen.

Da man nun oft keine andern Werkz als Maaßstäbe oder eine Meßkette bey sich so will ich fürs erste zeigen, wie man allerl unzugängliche Weiten, bloß durch Hülfe d beyden Werkzeuge ausfinden und messen könne obgleich die hiehergehörige Aufgaben, in den me Anleitungen zur Feldmeßkunst vorkommen habe ich doch nicht vor undienlich erachtet hie kürzlich das vornehmste davon beyzubrin weil sie zugleich die Gründe von andern ge trischen Aufgaben enthalten.

Von Ausmessung der Weiten vermit der bloßen Kette und Maaßstäbe.

§. 178. Aufgabe. A, B, Fig. XXVII. zwey Objecte, die sich in einer Horizontale

en, man soll ihren Abstand AB finden,
ch wegen eines dazwischen liegenden Hin-
ses F nicht unmittelbar messen läst: voraus-
t, daß von einem Dritten willkürlich an-
nmenen Punkte, C, ein freyer Zugang
A, B, verstattet ist.

ufl. Man setze in C ein Stab senkrecht
und messe die Weiten AC, BC, mit den
ßstäben, oder der Meßkette; die gemessenen
en, AC, BC, trage man in den Verlänge-
en von AC, BC, rückwärts von C nach a,
von C nach b, dergestalt daß Ca = CA
Cb = CB werde; messe dann die Ent-
ng ba, so wird dieselbe = AB seyn.

er Beweis ist aus Gleichheit der Dreyecke
, bCa, so klar, daß es unnöthig ist, ihn
vorzutragen.

uf. I. Dieses Verfahren setzt zum voraus,
sich die Weiten AC, BC, ungehindert auf
horizontalen Ebene, rückwärts tragen lassen.
ses verstattet aber oft der Raum nicht, be-
ers wenn AC, BC, beträchtlich groß sind.
solchen Falle trage man nur die Hälfte, den
ten vierten ꝛc. Theil der Weiten AC, BC
wärts, von C nach α, und von C nach β;
enn, aber wird die Weite αβ auch nur die
lfte, der dritte oder vierte Theil, der unbe-
ten Weite AB seyn. Denn wenn z. E.

$C\alpha = \frac{1}{3}$ CA, und $C\beta = \frac{1}{3}$ CB genommen w
den wäre, so ist $C\alpha : C\beta =$ CA : CB, da
auch der Winkel $\beta\alpha =$ ACB, so ist
Dreyeck $C\beta\alpha$ dem ACB ähnlich, mithin a
AC : $C\alpha =$ AB : $\alpha\beta$, folglich weil $C\alpha = \frac{1}{3}$
auch $\alpha\beta = \frac{1}{3}$ BA.

Zus. II. Lassen sich die den Weiten CA,
Proportionale Stücken $C\alpha$, $C\beta$ nicht rückwä
tragen, so trage man sie in den geraden R
tungen CA, CB, vorwärts von C nach m,
C nach n, so wird auf eben die Art auch
der AB proportional seyn.

Zus. III. Bey diesem Verfahren (Zus. I.
muß man sich aber alle Mühe geben, die
oder $\beta\alpha$ sehr genau zu messen; denn ein klei
Fehler auf mn oder $\beta\alpha$, vervielfältigt sich, w
man AB daraus finden will.

Gesetzt man habe $Cm = \frac{1}{8}$ CA; $Cn = \frac{1}{8}$
genommen, so ist auch $mn = \frac{1}{8}$ AB; wäre
her z E. mn = 4 Ruthen gefunden worden,
wäre AB = 8 . 4 R. = 32 R. Hätte m
aber man um 1 Zoll fehlerhaft gemessen, so
trüge dieses auf AB einen 8 mahl grös
Fehler.

Zus. IV. Oft kan man sich bey Auflösung
bisherigen Aufgabe auch folgendes Hülfsmit
bedienen, wo z. E. Fig. XXVIII. AB we
ei

dazwischen liegenden Flusses nicht gemessen
n könte, bey M sich aber eine Brücke be-
; da hier das Rückwärtstragen nicht statt
, so nehme man in der Verlängerung von
in paar willkürliche Stücken Aa, Bb; an a, b,
man ein paar Perpendicularlinien (§. 58)
on, so lang, daß man über die Brücke M,
nach n wegmessen kann. Um nun aus
gemessenen Stücken am, bn, mn, die
e AB zu finden, so gedenke man sich
n mit AB oder ab eine parallele pn,
pn = ab, und das Dreyeck mnp recht-
icht, wo pm = am — bn, folglich
$= r(mn^2 - (am - bn)^2) = ab$, mithin auch
= ab — Aa — Bb gefunden werden kan.

ieses Verfahren kan in ähnlichen Fällen oft
Nutzen gebraucht werden.

179. Aufgabe. Die Weite AB Fig.
K, die sich nicht unmittelbar messen läst,
nden, wenn man von dem willkürlichen
dpunkte D, nur nach B aber nicht nach A
mmen kan.

fl. Man verlängere AB, und nehme auf deren
ängerung eine Länge BC, von zureichender
se; von D messe man die Weiten BD, DC,
rage sie in geraden Linien, rückwärts; BD
D bis b, und DC von D bis c, setze bey b, c,

Stäbe

Stäbe ein, und gehe mit einem andern
in der geraden Richtung cb, bis d fort, n
Sta d mit D, A, in gerader Linie stehen n
Die bd messe man demnach, so wird bd =
seyn. Gleichfalls wegen Gleichheit der Dr
ABD, bDd; die sich gar leicht erweisen läs

Zus. I. Es erhellet, daß man wie in
hergehender Aufgabe, gleichfalls nur nöthi
proportionale Stücken rückwärts zu tragen.

Zus. II. Auch hätte man, wenn ma
mässe, des Standpunktes D Weite von A
Dd = DA.

Zus. III. Eine andere Auflösung der
legten Aufgabe zeigt sich Fig. XXX, wo vo
gesetzt wird, daß man vermittelst einer
schnur, oder einer Kette im Stande ist,
Winkel an einen andern Punkt zu tragen.

Man messe erstlich die Weite BD bis a
angenommenen Standpunkt, und trage sie
wärts von D nach b, so daß bDB eine g
Linie sey. Bey α stecke man einen Stab
gerade Linie BA, und bey δ einen in die g
Richtung BD, und messe nun in dem kl
Dreyecke αBδ, die drey Seiten Bα, Bδ,

Dieses kleine Dreyeck trage man nun an
Punkt b, so, daß der Winkel B an b ko
Man nehme also auf der geraden Richtung

ie ba = Bδ Fasse nun auf einer Meß-
oder Kette, eine Länge so groß als die
me der beyden Linien Bα, αδ; befestige die
n Enden dieser Schnurlänge, bey a, b,
panne sie nach den Richtungen bd, ad so
daß bd = Bα und ad = αδ werde, so er-
nan bey b einen Winkel = B. Man
nun bey C einen Stab ein, so daß
wohl mit b und d, als auch mit A
in gerader Linie stehe, so wird die Weite
le man hierauf messen kan = A: seyn wie
falls aus der Gleichheit der beyden Dreyecke
ADB erhellet.

wird bey diesem Verfahren gut seyn, die
n Bα, Bδ nicht gar zu klein, sondern z. E.
Ruthen lang zu nehmen.

och besser und bequemer ist es, Bα = Bδ, zu
en, damit das Dreyeck αBδ gleichschenklicht
.

uf. III. Aus den gemessenen Seiten des
en gleichschenklichten Dreyecks Bαδ, läst
er Winkel B durch trigonometrische Rech-
finden. Wenn man nun auf eben die Art
bey D, nach den Richtungen DB, DA,
ängen De = Dε willkürlich annähme, und
ε mäse, so liesse sich aus den Grössen De,
εε, auch der Winkel D berechnen. Aus
beyden solchergestalt gefundenen Winkeln

B,

B, D, und aus der gemessenen Seite BD, sich alsdann die unbekante Weite AB durc gonometrische Rechnung. Dieses Verfa zeigt also, wie blos durch Hülfe der K kette, und der damit verbundenen Rech die Weite AB gefunden werden könte ohne man nöthig hat, auf dem Felde selbst die S BD rückwärts, und den Winkel B an b zu tr

Nimt man die Längen Bα, Bδ, Dε, De durc von gleicher Grösse, und z. E. 5 Ruthen l so sind für den Halbmesser 5°, die Linien εe, Chorden der gesuchten Winkel B, D, wenn man ein für allemahl für den Halbm 5° oder 5000 Lin. die Chorden berechnet, eine Tafel davon verfertigt hat, so findet aus derselben, sogleich ohne weitere Rechn die denen Chorden αδ, εε, zugehörigen Wi Man vergleiche hiemit §. 138. III. T Messungsart, indem man die Winkel d Kette und Schnur, und einer Chordentafel stimmt, ist von vielen Feldmessern empfo worden, und die Anwendung davon auf viele Fälle hat Hr. Jetze (gemeinnützige Pra auf dem Felde und Papier ꝛc.) umständ auseinander gesetzt.

§. 180. Aufg. Eine Weite AB Fig. XX zu messen zu deren keinem Endpunkte A ode man bequem hinkommen kan.

Aufl. Man seße bey C einen Stab ein
rader Linie mit A und B. An C mache
einen rechten Winkel BCD §. 58, und nehme
von beliebiger Länge. Aus dem Stand-
e D trage man auf CD von D nach c eine
e willkürliche Länge z. E. einige Ruthen,
ße an c abermahls einen rechten Winkel,
die Richtung ce mit CA parallel werde.
ese Richtung ce seße man bey b, und a, in
raden Linien DB, DA, ein Paar Stäbe ein,
weil abc mit ABC parallel läuft

$$AB : ab = BD : bD = CD : cD ; \text{ also}$$

$$AB = \frac{ab \,.\, CD}{cD}$$

t man also auser den willkürlich angenom-
Längen CD, cD, auch noch die ab, so
sich daraus die unbekante Entfernung AB.

c brauchen nicht rechte Winkel zu seyn,
sie nur sonst von gleicher Grösse sind —
auptsache kömt nur darauf an, daß die
ung ce, der CA parallel werde.

t man in der Richtung CA, ein sehr weit
enes Objekt, so läst sich die Richtung e,
ine sehr leichte Art nach §. 60, der CA
el machen.

II Auflöſ. Ein anderes Verfahren di
zugängliche Weite AB zu finden zeigt ſich
XXXII.

Man nehme bey D einen willkürlichen S
punkt an, und ſetze dann bey F einen Sta
D und A, und bey E einen Stab mit D
in gerader Linie;

Setze demnächſt bey G einen Stab mit
F in gerader Linie, und alsdann in die g
Richtung GD, bey H einen Stab, auc
E und A in gerader Linie, ſo ergiebt ſich
dieſe Verzeichnung auf dem Felde ein V
HG EF; darinnen kan man meſſen EH,
DG, GF, FE, ED, DF.

Um nun die unbekante Weite AB zu f
ſo verzeichne man auf dem Papier nach de
jüngten Maaßſtabe eine kleinere Figur eh
welche der EHDGFE auf dem Felde ähnli
Dergeſtalt daß die kleinen Dreyecke ehd,
fdg, in eben der Ordnung und Verhältni
dem Papiere, wie auf dem Felde, gegen e
der liegen.

Verlängere hierauf die Seiten eh, fd
ed, fg, bis erſtere ſich in a, und leztere
durchſchneiden, meſſe nach dem verjü
Maaßſtabe, womit das kleine Viereck auf
gen worden, die Weite ab; ſo viel R

ꝛc. man für dieselbe findet, eben so viel Ruthen
ꝛc. wird die Seite AB würklich halten,
man sie mit der Meßkette messen könte.
ew. Weil die kleinen Dreyecke hde, edf,
denen HED, EDF, FDG ähnlich gemacht
n, so sind die Winkel hed = HED;
= DEF, also hed + def = HED + DEF
er Winkel hef = HEF; nun ist auch
= EFD, folglich in den Dreyecken AEF,
die Winkel an den Grundlinien EF, ef
er gleich, nemlich AEF = aef; EFA =
daher die beyden Dreyecke AEF, aef eins
ähnlich; auf gleiche Weise sind auch die
BEF, bef, ähnlich. Dies giebt also fol-
Proportionen

AE : EF = ae : ef
EF : EB = ef : eb

Also AE : EB = ae : eb
auch AEB = aeb
r Dr. AEB ∽ Dr. aeb.
ithin AE : AB = ae : ab
auch EF : AE = ef : ae

---

glich EF : AB = ef : ab
oder EF : ef = AB : ab.

. weil nach dem verjüngten Maaße, ef so
Ruthen Fusse ꝛc. hält, als EF auf dem Felde
der Meßkette, so wird auch ab nach dem

verjüngten Maaße so groß seyn, als A
der Meßkette.

Uebrigens ist es bey diesem Verfahr
theilhaft die Standlinie EF auf den
nicht zu kurz anzunehmen.

III. Auflös. Ein anderes Verfahr
unzugängliche Weite AB Fig. XXXIII zu
ist folgendes. Man wähle bey C einen
lichen Standpunkt, und setze in mäßige
fernung von C, bey E, D ein paar S
die geraden Richtungen CB, CA; in de
längerungen von CE, CD, DE, nehm
EG = CE, HD = CD, EF = ED
Setze bey G, F, H, I, Stäbe ein.
bringe man bey L einen Stab hin, so,
sich sowohl mit G, F, als auch mit A,
geraden Richtungen befindet, so wird GL
seyn, wie sich leicht erweisen läst. Auf e
Art setze man bey K einen Stab, in die
schaftlichen geraden Richtungen HIK,
wird auch HK = BC seyn Man messe
beyden Längen HK, GL, und trage erst
die Verlängerung von AC, von C nach
andere GL, in die Verlängernng der BC
nach a, so wird die Weite ab, die m
messen kan der AB gleich seyn.

Dieses Verfahren gehet auf dem Felde
man nur Platz zum Rückwärtstragen hat

r bequem von statten, und ist weit leich-
das ähnliche Pentherische S. dess.
Geometrie § 383, und weit weniger zu-
ngesetzt, als dasjenige welches Hr. Jetze
ein. Praxis auf dem Felde ꝛc. p. 33)
t.

Aufl. Gebrauch entfernter Objekte.

nn man auf dem Felde eine freye Aussicht
hr weit entlegenen Gegenständen haben
kan man sich derselben mit Vortheil auf
e Art zu Ausmessung unbekanter Entfer-
bedienen.

sey Fig. XXXIV AB die auszumessende

n nehme eine willkürliche Standlinie CD
d bemerke bey C, auf welchen Gegenstand
entlegenen Horizontes die Richtung CA
. Dc sey nun ein beliebiger Theil der
linie DC. Man begebe sich nach c und
y i einen Stab in die Richtung ci nach
tlegenen Objekte, einsetzen. Auf gleiche
treffe die Richtung CB auf das Objekt K
egenen Horizonte, und man lasse auch bey k
Stab in die Richtung cK einsetzen. Hier-
he man mit zweenen Stäben in der Rich-
ci, vorwärts, (welches geschiehet, wenn
nit den Stäben c, i, immer in gerader

Linie bleibt,) und setze bey a einen Stab
ein Gehülfe bey D, ihn in der geraden Lini
Auf gleiche Weise gehe man auch m
dern Stabe in der Richtung ck vorwärt
wo der Gehülfe D ihn in der gerade
siehet; solchergestalt stehet also a in d
schaftlichen Durchschnitte der beyden
DA, und b in dem Durchschnitte
Richtungen cK, DB. Man messe
Weite ab, so wird dieselbe ein solches
AB seyn, als cD von der Standlin

Denn weil die Objekte I, K sehr w
sind, so kan man ohne grossen Fehler
ca, CA; cb, CB, als parallel ans
mithin die Winkel ACD = acD; CD
BCD = bcD, folglich die Dreyecke
acD, und BCD dem bcD ähnlich setzen
hat man

DA : Da = DC : Dc
BD : bD = DC : Dc

---

also DA : Da = BD : bD

folglich wegen des gemeinschaftlichen
ADB das Dr. ABD ∽ abD mithin

AB : ab = BD : bD = DC : cD

folglich ist ab ein solches Stück von
cD von CD.

Es verstehet sich daß diese Methode desto weniger fehlerhaft ist, je weiter die Gegenstände , K am Horizonte hinaus liegen.

Hr Lambert in seinen Beyträgen zur practischen Geom. lehret diesen Gebrauch entfernter Gegenstände, und man kan in manchen Fällen, wo die auszumessende Entfernung Aß nicht gar zu groß ist, oder von der Standlinie zu weit wegliegt, sich dessen gar wohl bedienen.

Anmerkung

§ 181. Das bisherige mag zureichen, Anfängern Gelegenheit zu geben, sich in Messung gerader Linien auf diese Art zu üben. Man wird aber indessen gar leicht wahrnehmen, daß, wenn die auszumessenden Weiten entweder zu groß sind, oder von der Standlinie, oder den Standpunkten zu weit wegliegen, die gegebenen Auflösungen theils unzulänglich theils auch wegen vorkommender Hindernisse und Mangel des Raumes gar nicht ausgeübt werden können, oder zu weitläuftig ausfallen. Wenn aber diese Einschränkungen nicht vorhanden sind, so kan man sich ihrer oft mit Vortheil bedienen. Uebrigens kömt die Richtigkeit des Verfahrens auch auf eine geschickte Auswahl der Standlinie, oder der Standpuncte an, wo man die Vorsicht gebrauchen muß, daß an denselben nicht gar zu spitze oder stumpfe Winkel zum Vorscheln kommen.

Auch wird es zur Erleichterung
wie auch Verwirrung zu vermeiden,
wenn man sich von der Auflösung eine
vorher einen Entwurf auf dem Pap
ehe man die Operation auf dem
vornimt.

Eine andere Einschränkung der bisl
thoden, ist, daß die auszumessende W
als auch die willkürlich angenommen
punkte oder Standlinien sich in ein
Ebene befinden müssen; in bergigten
würden daher die gegebenen Auflösu
anwendbar seyn.

Wir müssen also auf andere Hülf
dacht seyn, und hierzu werden uns, de
das Astrolabium, die Bussole ꝛc.
Dienste leisten.

Messung der Weiten an die sich d
stab nicht unmittelbar bring
durch Hülfe des Meßtisches
labii ꝛc.

§. 182. Aufg. A, B, Fig. XXXV Ta
zwey dergleichen Objekte, man soll ihre
talabstand AB, durch Hülfe des Meß
den, vorausgesetzt, daß man von einen
chen Standpunkte C, gerade zu, nach
hinmessen kan.

Aufl. I. Man bringe den Meßtisch über den Standpunkt C, stelle ihn horizontal (§. 113) und bestimme auf ihm einen Punkt c, der lothrecht über C liegt (§. 128 IV). An c lege man das Diopterlinial, visire nach A, B, und ziehe dahin die Richtungslinien cm, cn, so hat man den Winkel ACB auf dem Felde, aufs Meßtischgen gebracht (§. 128.) Man messe nun die Weiten CA, CB, und trage erstere CA nach dem verjüngten Maaßstabe aufs Meßtischgen von c nach a, die andre CB aber, auf die entsprechende Richtung cn von c nach b. Messe demnächst auf dem Meßtische die Weite ab, nach dem verjüngten Maaßstabe, so wird solche der AB gemäß oder ähnlich seyn, d. h. nach dem verjüngten Maaßstabe, womit man ca, cb, aufgetragen hat so viel Ruthen, Schue, und Zolle halten, als AB nach der Meßkette halten würde, weil wegen des Winkels ACB = acb, und der Proportion AC : CB = ac : cb, das Dreyeck acb auf dem Meßtische, dem großen Dreyecke ACB ähnlich seyn wird.

II Aufl. Vermittelst des Astrolabii, AB zu finden, messe man den Winkel ACB (§. 132) und die beyden Seiten AC, BC; berechne hieraus in dem Dreyecke ACB die Seite AB nach der gewöhnlichen Weise, oder nach (Trig. S. XVII).

Wolte man nicht so genau verfahren
man vermittelst eines geradlinigten
teurs, den gemessenen Winkel aufs P
setzte auf beyde Schenkel, die gemessen
CA, CB. so erhielte man, wie auf
tische ein kleines Dreyeck, das dem gr
ähnlich wäre ꝛc.

§. 183 Aufg Die Weite AB (Fig
zu finden, wenn man von einem w
Stande C nur nach A hinmessen kan.

Aufl. I. Man bringe wie vorhin (§
Meßtisch über C, und bestimme auf dem
Winkel mcn = ACB; messe die We
trage sie auf die entsprechende Rich
cm, von c nach a.

Man nehme nun den Meßtisch üb
und trage ihn über A, dergestalt, daß
a über A, und durch gehörige Verrü
Wendung des Meßtisches, die Richt
die gerade Linie AC, oder vielmehr in
AC eingebildete Verticalebene zu liege
so, daß man durch die Dioptern des
gelegten Linials, das bey dem ersten
zurückgelassene Signal bedeckt siehet —
die bey der ersten Station C auf dem
gezogene Linie cn, bey der zweyten St
A, die Lage cn, die mit der cn der ers
tion parallel seyn wird, bekommen.

Man lege nun an a die dioptrische Regel, visire nach B, und ziehe auf dem Meßtische die Richtungslinie ar; wo dieselbe, die Richtung cn durchschneidet, da wird sich ein Punkt b ergeben, welcher gegen a, c, eben die Lage haben wird, die B gegen A, C hat; denn vermöge des Verfahrens ist das Dreyeck auf dem Meßtische nemlich abc dem großen ABC ähnlich, weil die Winkel acb = ACB, cab = CAB sind. Die Linie ab auf dem Meßtische, wird also nach dem verjüngten Maaßstabe, der AB, gemäß seyn.

Es verstehet sich, daß, während man auf dem Meßtische die Linien neben der Regel herziehet, der Meßtisch unterdessen in unverrückter Lage erhalten werden müsse.

Aufl. II. Mit dem Astrolabio messe man die beyden Winkel C, A, und finde, aus C, A, AC, die Seite AB durch Rechnung, nach der bekanten Proportion

$\sin B : AC = \sin C : AB$; wo $B = 180° - A - C$

mithin

$\log AB = \log AC + \log \sin C - \log \sin (180° - A - C)$

Anmerk. Es pflegt sich unterweilen zuzutragen, daß wegen Wahl eines zu grossen verjüngten Maaßstabes, oder weil der Punkt c auf dem Meßtische nicht bequem angenommen worden, die Richtungslinie ar die cn auf dem Meßtische

nicht durchschneidet, sondern daß der D
b ausserhalb des Meßtisches fällt. I
Falle, welcher Fig. XXXVII vorgestel
ar die Richtung cn in b ausserhalb de
sches schneidet, nehme man entweder e
nern verjüngten Maaßstab an, womit
Weite AC von c nach a aufträgt; o
man denselben Maaßstab beybehalten
halbire man bey γ die Linie ac, od
aγ = ½ ac oder ¼ ac, nachdem man
befindet, und ziehe durch γ mit cn ein
γβ, welche die Richtungslinie nach
durchschneidet, also in einem Punkte de
Meßtische liegt. Messe nach dem v
Maaßstabe, womit man ca aufgetrage
Weite aβ. Hätte man nun aγ = ½ a
men, so wäre aβ = ½ ab; für aγ = ⅓
aβ = ⅓ ab u. s. w. Man würde al
AB gemässe Weite ab, dennoch verm
aβ finden, obgleich b ausserhalb des M
fiele.

Beym Gebrauche des Astrolabii ist
chen Vorfällen wie eben gewiesen word
ausgesetzt, weil man da die AB durch
findet.

Wenn die Weite AB sehr groß ist,
der Durchschnitt b sehr oft ausserhalb d
tisches fallen, oder man müste einen seh

verjüngten Maaßstab annehmen. Da könte man sich aber keine große Genauigkeit versprechen. Deswegen ist bey Messung sehr großer Weiten immer das Astrolabium vorzuziehen.

Einige practische Schriftsteller, rathen ein Brett A von guten trocknen Lindenholze, wie Fig. XXXVIII ausweiset, das etwa 6 bis 8 Zoll breit, und eben so lang und dick der Meßtisch ist, bey w, r, mit zwoen eingeschnittenen Nuthen zu versehen, die man demnächst an ein paar Leisten i, k, welche etwa durch Schrauben an die untere Fläche des Meßtisches Fig. XXXVII befestigt werden können, anschiebet, so, daß das Brett A mit der Ebene des Meßtisches genau einer einzigen Fläche liege. Da man solchergestalt durch das angesetzte Brett einen größern Raum auf dem Meßtische erhält, so kan man sich dadurch aus der Verlegenheit helfen, wenn ein Durchschnittspunkt wie b Fig. XXXVII außerhalb des Meßtisches fallen solte; weil man alsdann den Durchschnitt b auf dem angesetzten Brette erhalten wird, wenn anders b nicht gar zu weit außerhalb des Meßtisches fällt.

Aufl. III. Da man bey der vorgelegten Aufgabe, nöthig hatte, den Meßtisch von dem ersten Standpunkt C nach A zu bringen, und dieses Tragen des Meßtisches von einem Orte zum andern, mit einigen Unbequemlichkeiten wie

auch

auch mit Unrichtigkeiten verbunden
wenn man bey der zwoten Station
den Meßtisch nicht gehörig einrichte
man sich durch folgendes Hülfsmittel,
tragen des Meßtisches ersparen. S Fig
Man stecke nemlich, nachdem der
über C gestellet worden, bey D und O,
ger Weite von C ein paar Stäbe ab,
in gerader Linie stehen. Nun ziehe ma
Meßtische aus dem lothrecht über C
Punkte c, nach den vier Objecten A,
die unbestimmten Richtungslinieu ct,
cm; die gemessenen Weiten CA, C
trage man nach dem verjüngten Maaß
entsprechende Richtungsli ien ct, cn,
c nach a, von c nach o, von c nach
durch die Punkte d, o, auf dem Meß
gerade Linie dob, welche die nach B
Richtung cw in b schneidet, messe
Weite ab, nach dem verjüngten Maaß
wird man die Grösse der AB in Ruthe
und Zollen finden, weil ab der Al
seyn muß.

Denn wegen des gemeinschaftlichen
OCD = ocd, und weil man oc : cd =
gemacht hat, ist der Triangel cod
also der Winkel cdo = CDO folglich
Triangel bcd ∽ BCD, weil die Winke
den einerley sind,

folglich eb : CB = ed : CD Es ist aber auch
per Constr.) ca : CA = cd : CD

---

also cb : CB = ca : CA
Auch d. Winkel ACB = acb
Folgl. d Dreyeck ACB ∽ acb
Mithin ca : CA = ab . AB

d. h. weil man nach dem verjüngten Maaße ca der CA gemäß gemacht hat, so wird nach eben dem Maaßstabe auch ab der AB gemäß seyn.

Dieses Verfahren, ist in der That zu empfehlen, ob man gleich die Linien CO, CD, ausser der CA, auch noch messen muß; dadurch erspart man sich aber das Fortragen des Meßtisches, wie auch die gehörige Stellung über A wozu gewis mehr Zeit erfordert wird, als zur Messung der Linien CO, CD.

§. 184. Aufg Eine Weite AB Fig. XL. zu messen, zu deren keinem Ende A oder B, man aus willkürlichen Standpunkten hinkommen kan.

Aufl. I. Man nehme eine willkürliche nicht zu kleine Standlinie CD an, bringe den Meßtisch über C, stelle ihn horizontal, und bestimme auf demselben den Punkt c, der über C lothrecht liegt.

An

An c lege man die Regel, visire na
D, und ziehe die Richtungslinien cm, cn,
nun die Standlinie CD. und trage sie
auf die zugehörige Richtung cr, von
so stellet der Punkt d auf dem Papiere
D auf dem Felde, vor.

Hierauf bringe man den Meßtisch
daraufgezogenen Linien cm, cn, cr, nach d
Station über D; dergestalt, daß 1) d
ersten Station erhaltene Punkt d, loth
D und 2) die Linie dc bey der zwoten
wieder längst DC zu liegen komme,
daß man durch die Dioptern der längst
legten Regel, die bey C zurückgelasse
erblickt.

In dieser Lage bleibe der Meßtisch u

Man richte die Dioptern nach A uni
ziehe aus d längst des Diopterlin
Richtungen da, db, oder, ohne die
da, db würklich auszuziehen, bemerke
deren Durchschnitte a, b, auf den R
linien cm, cn, die bey der erstern St
Mestisches, nach den Objekten A, B, h
worden, so wird man auf dem Meß
Weite ab finden, welche der AB nach den
ten Maaßstabe womit man dc aufgetr
gemäß seyn, mithin die auf AB gehend
von Ruthen u. s. w. anzeigen wird.

Bew. Weil der Winkel acd = ACD und adc = ADC so ist das Dreyeck acd dem Dreyecke ACD ähnlich — dies giebt folgende Proportionen

AC : ac = CD : cd

BC : bc = CD : cd

also AC : ac = BC : bc

oder AC : BC = ac : bc

da nun auch der Winkel ACB = acb, so ist das Dreyeck acb dem ACB ähnlich mithin AB : ab = AC : ac = CD : cd oder AB : CD = ab : cd d. h. wenn cd die Weite CD nach dem verjüngten Maaßstabe ausdrückt, so wird auch ab die AB nach diesen Maaßstabe ausdrücken.

Zus. Diese Aufgabe ist sehr wichtig, und, so wie die Linie AB auf dem Felde durch ab auf dem Meßtische entworfen worden, so dienet diese Aufgabe selbst ganze Figuren auf dem Papiere zu entwerfen, wovon in der Folge mit mehrerem Unterricht gegeben werden soll.

Die wichtigste Vorsicht ist 1) den Meßtisch in unverrückter Stellung zu erhalten, während man die Linien auf demselben ziehet, und 2) bey der zwoten Station des Meßtisches, durch gehörige Wendung des Tisches, die Linie dc genau längst DC einzurichten.

Wenn letzteres geschiehet, so werden die Linien ca, cb, oder cm, cn, die man über der

erstern

erstern Station auf dem Meßtische erh
bey der zwoten Station desselben über
mit den correspondirenden Linien auf
d. h. mit CA, CB parallel seyn weil
acd = ACD; bcd = BCD u. s. w.
wird mit AB parallel werden, derge
also über der zwoten Station alle
ab ꝛc. denen zugehörigen AC, AB gl
seyn werden.

Zus. I. Man kan auch, ohne bey
Station des Meßtisches, de längst DC
rückvisiren einzurichten, den gehörigen
Meßtisches, durch Hülfe einer gute
nadel erhalten.

Da nemlich die Richtungen der M
ohne merklichen Fehler als parallel an
werden können, wenn die Oerter ni
von einander entfernt sind (§. 118
man, nachdem bey der ersten Statio
em. cn, cr, gezogen worden, bey u
Stellung des Meßtisches, auf den
Richtung der Magnetnadel μν. (§.

Damit nun bey der zwoten Statio
tisches über D, die Linien cm, cn,
CB parallel werden, und übrigens au
DC zu liegen komme, so bringe ma
hörige Wendung des Tischblattes
Punkt d lothrecht über D, und dabey

ur erst ohngefähr nach dem Augenmaaße in die Richtung DC; nachdem dieses geschehen ist, lege nan die dioptrische Regel an die bereits bey der rsten Station gezogene Richtung der Magnet- adel $\mu\nu$, wende demnächst den Meßtisch hori- ontal herum, bis die Magnetnadel wieder genau ber der auf dem Boden des Magnetkästgens ezogenen Nordlinie einspielet, so wird alsdann ie Linie $\mu\nu$ über der zwoten Station, der $\mu\nu$ über er erstern parallel werden. Mithin werden auch ie Richtungen cm, cn, bey der Station 2, mit CA, CB die gehörige parallele Lage erhalten, nd wenn d über D liegt, so wird auch dc längst DC fallen. Mithin wird man durch Hülfe der Magnetnadel eben das erhalten, was sonst bey er zwoten Station durchs Zurückvisiren nach er erstern erreicht wird.

Dabey wird aber zum vorausgesetzt, daß D von C nicht gar weit wegliege, weil es sonst ohne einigen Fehler nicht verstattet ist, die Richtung der Nadel bey D, mit der Richtung derselben bey C, als gleichlaufend anzunehmen.

Dieses Verfahren, durch Hülfe der Magnet- nadel, an jeder folgenden Station, den Meß- tisch so zu stellen, daß die auf demselben bereits bey der ersten Station erhaltenen Linien, wieder mit den correspondirenden auf dem Felde parallel werden, hat auch sonst in vielen Fällen, großen

Nutzen. Auch wird es bey der Vern
gebraucht, der sich Hr. Hogreve (S
desvermessungen) bey der topographi
nahme eines Landes bedient.

Bey der Aufgabe des gegenwä
wolte ich aber doch allemahl lieber r
bey der zwoten Station des Zur
nach der erstern zu bedienen, weil da
denen Fehlern unterworfen ist, die
zufälligen Unvollkommenheiten der M
so oft zu befürchten sind (§. 120).

II. Auflösung.

Man kan auch ohne den Meßti
zwote Station D zu bringen, sogleich
sten Station C die Weite AB finden;
man sich die Mühe geben noch ein
mehr zu messen. S. die XXXIX Fi

Nachdem man nemlich den Meßti
über C gestellet hat, so lasse man
ein paar Stäbe mit B in die gerade
und bey I einen Stab in die gerade
einsetzen. Ziehe nun auf dem Meß
den Objekten A, B, D, O, I, aus
tungen ca, cw, u. s. w. Messe den
Weiten CD, CO, CI, und trage sie
verjüngten Maaßstabe auf die entsprech
tungen cm, cn, cw, von c nach
nach o, von c nach i, lege an d, o

l, i, ein Linial, so werden nach gehöriger Ver-
längerung der Linien do, di, dieselben auf denen
nach A, B gezogenen Linien cw, ct, die Punkte
, a, abschneiden, und solchergestalt auf dem
Meßtische die Weite ab bestimmen, welche der
AB gleich seyn wird.

Der Beweiß hievon ist dem der III. Aufl. des
183 §. völlig ähnlich. Hier liegt I auch in
der geraden Linie CB, es ist aber dieses nicht
nöthig, wenn I nur in der geraden Linie DA liegt.

III. Auflösung.

Mit dem Astrolabio und durch Hülfe trigonometrischer Rechnung.

Man messe mit dem Winkelmesser bey C (Fig. XL) die Winkel ACD, BCD; hierauf bey D die Winkel CDA, CDB und dann die Standlinie CD, so wird sich durch Auflösung einiger Dreyecke, die Weite AB folgendergestalt berechnen lassen.

1. Man nenne die bekanten Winkel BCD $= \alpha$, ACD $= \beta$; CDA $= \gamma$, CDB $= \delta$, die Standlinie CD $=$ m; so sind erstlich in den Dreyecken ACD, BCD, die Winkel

$$CAD = 180° - ACD - CDA = 180° - (\beta + \gamma)$$
$$CBD = 180° - BCD - CDB = 180° - (\alpha + \delta)$$

bekant.

2. Man sehe also der Kürze halber
A; CBD = B so ist in den Dreyecken C

$$\sin A : m = \sin \gamma : AC$$

$$\sin B : m = \sin \delta : BC$$

Daher $AC = \frac{m \sin \gamma}{\sin A} = m \sin \gamma$

$$BC = \frac{m \sin \delta}{\sin B} = m \sin \delta$$ c

3. Also sind die Seiten AC, BC des
ACB bekant.

4. Auch weiß man den eingeschlosse
kel ACB = ACD — BCD = β —
daraus läst sich also die Weite AB t
trisch berechnen.

5. Die gewöhnliche Regel ist folge

Man nenne die halbe Summe d
Winkel CAB, CBA = S, ihre halbe
= φ; so ist

$$\frac{180° - ACB}{2} = S \text{ oder}$$

$$90° - \tfrac{1}{2} ACB = S$$

Um die halbe Differenz φ zu fi
schliesse man

$$BA + AC : BC - AC = \text{tang } S$$

Also $\tan g \varphi = \frac{BC - AC}{BC + AC} \tan g S$

$= \frac{BC - AC}{BC + AC} \cot \frac{1}{2} ACB$

in welcher Formel die Seiten BC, AC, und der er Winkel ACB (2. 3. 4) bekant sind.

6. Wenn nun BC die grössere Seite bedeutet, o ist der gegenüberstehende Winkel CAB bekan- ermaaßen $= S + \varphi = 90° - \frac{1}{2} ACB + \varphi =$ $90° - (\frac{1}{2} ACB - \varphi)$ also auch CAB bekant.

7. Hiernächst wird also die Weite AB durch olgende Proportion gefunden

$\sin CAB : BC = \sin ACB : AB$

oder (6)

$\cos(\frac{1}{2} ACB - \varphi) : BC = \sin ACB : AB$

aher $AB = \frac{BC \sin ACB}{\cos(\frac{1}{2} ACB - \varphi)}$ oder wenn man Tafeln für die Secanten hat

$AB = BC \sin ACB \sec(\frac{1}{2} ACB - \varphi)$

8. Diese Auflösung kan durch Logarithmen ber erkstelligt werden. Aus (2) erhält man die ogarithmen der Seiten BC, AC; und folglich us den Tafeln die Seiten BC, AC selbst. Um

den Winkel φ (5) zu finden, muß m
die Logarithmen von CB + AC und
berechnen.

Damit man nun nicht nöthig habe
den Tafeln die Seiten BC, AC, un
Logarithmen von BC + AC; BC —
chen, so kan man obige Rechnung noc
kürzen, wie folget,

9. Weil aus (5) auch

$$\log \operatorname{tang} \varphi = \frac{1 - \frac{AC}{BC}}{1 + \frac{AC}{BC}} \cdot \cot \frac{1}{2}$$

so suche man einen Winkel = ψ

$$\operatorname{gente} = \frac{AC}{BC}$$ ist, so hat man

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{1 - \operatorname{tang} \psi}{1 + \operatorname{tang} \psi}, \text{ co}$$

10. Wenn man aber in Trig. S.
dortige $\beta = 45°$ und $\gamma = \psi$, mi
$= \operatorname{tang} 45° = \sin \operatorname{tot} = 1$ setzet

$$\operatorname{tang}(45° - \psi) = \frac{1 - \operatorname{tang} \psi}{1 + \operatorname{tang} \psi}$$

11. Folglich (9)

$$\text{tang}\,\varphi = \text{tang}\,(45° - \psi)\,\text{cot}\,\tfrac{1}{2}\,\text{ACB}$$

$$= \frac{\text{tang}\,(45° - \psi)}{\text{tang}\,\frac{1}{2}\,\text{ACB}}$$

15. Bringt man also das bisher beygebrachte in eine einzige Vorschrift, und bedienet sich überal der Logarithmen, so erhält man folgende

Regel.

Man suche erstlich nach (2) die Logarithmen der beyden Seiten BC, AC

Hierauf nach (9) einen Winkel ψ durch

$$\log \text{tang}\,\psi = \log \text{AC} - \log \text{BC}$$

Alsdann nach (11) einen Winkel φ durch

$$\log \text{tang}\,\varphi = \text{l tang}\,(45° - \psi) - \text{l tang}\,\tfrac{1}{2}\,\text{ACB}$$

Sc wird (7) log AB =

$$\log \text{BC} + \log \text{sin ACB} + \log \text{sec}\,(\tfrac{1}{2}\text{ACB} - \varphi)$$

13. Wenn man sich der gemeinen Formel (5) bedienen will, so muß man in dem Falle da AC, BC, die Gränzen der Tafeln überschreiten durch Proportionaltheile die Rechnung führen. Und da braucht man um den Winkel φ zu berechnen 4 Proportionaltheile, nemlich zween um die Werthe von BC, AC, und zween um die Logarithmen von BC + AC, BC — AC, zu erhalten.

Bedienet man sich aber der Vorsc
so braucht man dazu nur zween Pro
theile, einen um den Winkel ψ bis
kunden, und dann einen um log tang
zu berechnen.

Daher ist also die Formel (12) zu
nung ungleich bequemer als die gewöh

14. In den meisten Fällen ist es e
Sekunden in den Winkeln ψ; 45°
wegzulassen; den Fall ausgenommen
Winkel sehr klein sind. Hiedurch wir
gen Ersparung der Proportionaltheile,
nung noch leichter.

14. Die Formel (12) setzt zum v
BC die grössere und AC die kleinere
Dreyecks ACB ist. Es ist klar
die größere, BC aber die kleinere S
alsdann

$$\log \text{tang } \psi = \log BC - \log A$$

log tang φ wie vorhin bliebe, und l

$$\log AC + \log \sin ACB + \log \sec (\tfrac{1}{2} A$$

würde.

16. Es ist ferner klar daß die F
log tang ψ eigentlich diesen Logarithme
Sinus tot = 1 giebt. Verlangt man
Logarithmen dieser Tangente für den

der Sinustafeln, so muß man eigentlich zu log AC — log BC die Zahl 10 addiren.

Ein gleiches ist in Absicht des Logarithmen der Tangente des Winkels φ zu bemerken.

17. wenn der Winkel $\varphi > \frac{1}{2}$ ACB gefunden wird, so ist eigentlich $\frac{1}{2}$ ACB — φ negativ; alsdann muß man aber statt col $(\frac{1}{2}$ ACB — $\varphi)$ (7) oder statt sec $(\frac{1}{2}$ ACB — $\varphi)$ setzen col $(\varphi - \frac{1}{2}$ ACB) oder sec $(\varphi - \frac{1}{2}$ ACB)

Dies erhellet daraus weil col $(\frac{1}{2}$ ACB — $\varphi)$ = col $(\varphi - \frac{1}{2}$ ACB) ist, und eben dasselbe auch von den Secanten gielt.

Exempel.

18. Um den Gebrauch der in (12) beygebrachten Formel mit einem Beyspiele zu erläutern, so soll folgendes dazu dienen.

An einer Standlinie CD von 1517,7 Kalenb. Fuß = m maaß ich die Winkel

ACD = β = 63° . 38′; BCD = α = 49° . 44′
CDA = γ = 89° . 54′; CDB = δ = 95° . 13′

Dies giebt die Winkel

A = 26° 28′. B = 35° . 3′. ACB = 13° . 54′
$\frac{1}{2}$ACB = 6 . 57′

Folglich

log m = 3,1811859
l sin γ = 9,9999993 — 10
l cosecA = 0,3509797

log AC = 3,5321649
l m = 3,1811859
l sin δ = 9,9981974 — 10
l cosecB = 0,2408679

l BC = 3,4202512
l AC = 3,5321649

log tang ψ = 9,8880863 also ψ = 37°
45° — ψ = 7
log tang (45° — ψ) = 9,1076759
l tang ½ ACB = 9,0859996

l tang φ = 10,0216763
φ = 46°. 25'. 45"
φ — ½ ACB = 39°. 28'. 45" = 39°

Also endlich

l AC = 3,5321649
l sin ACB = 9,3806237 — 10
l sec (φ — ½ ACB) = 0,1124898

log AB = 3,0252784
AB = 1060 Kalenb. Fuß.

Dies ist die Weite des südlichen Johannikirchthurms in Göttingen, vom Observatorio. Die erwähnte Standlinie von 1517,7 Fussen war auf einer Wiese außerhalb der Stadt angenommen worden.

IV, Auflösung.

Wolte man vermittelst einer Zeichnung aus den mit dem Astrolabio gemessenen Winkeln α, β, γ, δ, die Weite AB auf dem Papiere bestimmen, so kan man sich zu dieser Absicht unterschiedener Methoden bedienen.

I. Man trage die gemessene Grundlinie CD, nach dem verjüngten Maaßstabe aufs Papier, und mache also cd Fig. XLI der CD gemäß. Setze hierauf durch Hülfe des geradlinigten Transporteurs, oder vermittelst anderer Methoden (§. 139 u. f.) an c ein paar Winkel acd = ACD, bcd = BCD, und an d die Winkel cdb = CDB, cda = CDA, so werden sich auf dem Papiere die Linien ca, da, bey a, und cb, db, bey b schneiden, und solchergestalt die Weite ab bestimmen, welche nach dem verjüngten Maaßstabe der AB gemäß seyn wird.

II. Man berechne in dem Dreyecke ACD, aus den bekanten Grössen ACD, ADC, CD die beyden Seiten CA, AD, und dann aus den Winkeln BCD, CDB und der Standlinie CD,

in

in dem Dreyecke CDB die beyden S
DB, welche Rechnung durch Logarith
geschwind von statten gehet. Beschreibe
auf dem Papiere über cd (Fig. XLI)
der CD gemäß nimt, das kleine Dr
oder bestimme bloß den Punkt a, d
Durchschnitt zweener Kreisbogen, die
c, d, mit den Halbmessern ca, da
man den berechneten Seiten CA, DA
nimt, beschreibt. Auf gleiche Weise
mit den Weiten cb, db, die denen CB, I
gemacht worden, das Dreyeck cdb be
mithin der Punkt b, folglich auch die
bestimt.

III. Es wird sehr oft geschehen, daß
gen ca, da, cb, db, so groß ausfall
man sie mit einem Handzirkel von gew
Grösse nicht bequem von dem verjüngte
stabe abnehmen, folglich auch nicht die
acd, cbd, beschreiben kan. In dies
muß man sich entweder eines grössern
zirkels bedienen, oder auf folgende Art z
gehen.

Es sey Fig. XLII ABCD, noch imm
bisher betrachtete Viereck auf dem Felde.
stelle sich von A, B, auf die Standli
Perpendicularlinien AE, BF, herabgefä
und berechne in den rechtwinklichten D

CE, BDF, die senkrechten Entfernungen AE, F, und die Weiten CE, DF. Dies kann geschehen weil man die Seiten CA, BD, und die Winkel ACE $=$ 180° $-$ ACD $=$ 180° $-$ β, DF $=$ 180° $-$ CDB $=$ 180° $-$ δ weiß.

Es ist nähmlich

$$\sin CAD : CD = \sin CDA : CA$$
$$\sin CBD : CD = \sin BCD : BD$$

Also $CA = \frac{m \sin \gamma}{\sin A}$; $BD = \frac{m \sin \alpha}{\sin B}$

Mithin in den rechtwinklichten Dreyecken CAE, BDF, für den Sinus totus $=$ 1

$$1 : \sin (180° - \beta) = AC : AE$$
$$1 : \cos (180° - \beta) = AC : CE$$
$$1 : \sin (180° - \delta) = BD : BF$$
$$1 : \cos (180° - \delta) = BD : DF$$

Man berechne also erstlich durch Logarithmen

$$\log CA = \log m + \log \sin \gamma - \log \sin A$$
$$\log BD = \log m + \log \sin \alpha - \log \sin B$$

so wird demnächst

$$\log AE = \log AC + \log \sin (180° - \beta)$$
$$\log CE = \log AC + \log \cos (180° - \beta)$$
$$\log BF = \log BD + \log \sin (180° - \delta)$$
$$\log DF = \log BD + \log \cos (180° - \delta)$$

Die

Die ganze Rechnung wird also sehr
Logarithmen geführt.

Hier in der XLII Figur, fallen bey
diculärlinien AE, BF, ausserhalb de
ACD, CBI), und E liegt linker Hand
ter Hand D. Man wird nun gar
einer roh entworfenen Zeichnung,
selbst aus Beschaffenheit der Wink
Standlinie CD, beurtheilen könne
Lage in jedem Falle die Punkte E,
auch die zugehörigen Perpendiculären
haben.

Nachdem man nun die Grössen
BF, DF berechnet hat, so wird man
Papiere gar leicht die Punkte a, b,
bestimmen können. Man nehme ne
der Standlinie cd, die Weiten ce,
berechneten CE, DF gemäß, errichte
ein paar senkrechte Linien und nehme
die Weiten ea, fb, denen EA, FB
wird man die Weite ab auf dem Pap
ten welche der AB auf dem Felde ge
wird.

Um die Form der Berechnung zu
so will ich die Zahlen des obigen Be
Aufl. gebrauchen.

Diese geben demnach

log m = 3,18118
l sin α = 9,88255

13,06373
l sin B = 9,75913

log BD = 3,30460
l sin(180° — δ) = 9,99819
l cos(180° — δ) = 8,95867

log BF = 3,30279
log DF = 2,26327
log m = 3,18118
l sin γ = 9,99999

13,18117
l sin A = 9,64902

log AC = 3,53215
l sin(180° — β) = 9,95229
l cos(180° — β) = 9,64749

log AE = 3,48444
log CE = 3,17964

Dieß giebt also AE = 3051; CE = 1512
BF = 2008; DF = 183

Wobey

Wobey dann zu merken ist daß
Beyspiele, der Punkt E rechter Han
F gleichfalls rechter Hand U liegen
nach man sich also bey der Zeichnun
ten hat.

Diese Methode, die Punkte A, B
Felde, zu Papiere zu bringen, hat
der gewöhnlichen, wobey man sich
des gemeinen Transporteurs zum Auf
Winkel bedienet sehr viele Vorzüge, o
wegen einiger Rechnung die aber in de
leicht ist, etwas zusammengesetzter zu se
Wenn man zum Auftragen der Wink
gleich des geradlinigten Transporteur
wolte, so wird man doch nie die Sch
ten, welche man in Entwerfung de
A, B, vermittelst der Perpendicular
BF, erhält.

Wenn man ferner überlegt,
reine ein Riß wegen den vielen
die man beym Gebrauch des ge
Transporteurs ziehen muß, ausf
vielen Unbequemlichkeiten besonders
stumpfen oder spitzen Winkeln der g
Transporteur unterworfen ist, wie
nauigkeit man sich zu versprechen h
wie es sehr oft zu geschehen pflegt, sich
längerten Schenkel der aufgetragene

bey a, b, unter sehr spitzen Winkeln durch-
schneiden, und sich folglich sehr an einander fort-
schleifen, wie viel Fehler man überhaupt beym
Auftragen der Winkel, noch aus sehr vielen an-
dern Ursachen zu befürchten hat, so wird man gewis
eine kleine Berechnung der Perpendiculärlinien,
EA, CE, nicht scheuen, und da bey Entwerfung
mehrerer Oerter in Absicht der Standlinie, einige
derselben oft sehr weit von der Standlinie weg-
fallen, so wird man durch die Grösse der berech-
neten Perpendiculärlinien AE, CE u. s. w schon
ohngefähr einen Ueberschlag machen können,
theils, wie man die Standlinie auf dem Pa-
piere am bequemsten legen, theils auch wie groß
man den verjüngten Maaßstab nehmen müsse,
damit man alle Oerter auf der vorgegebenen
Grösse des Papiers erhalte, und nicht einige
ausserhalb desselben fallen. Uebrigens geschiehet
es bey Vermessung ganzer Landschaften, sehr oft,
daß man die Entfernung solcher Oerter die man
schon zu Papiere gebracht hat, wieder zu neuen
Standlinien und zur Bestimmung anderer Oerter
gebraucht, und da ist es schlechterdings noth-
wendig auf ihre Verzeichnung alle mögliche
Sorgfalt zu wenden, weil sich sonst Fehler auf
Fehler häufen, und alle Arbeit vergeblich seyn
würde. Nie wird man aber durch würkliche
Auftragung der Winkel, die zu dieser Absicht
nöthige Genauigkeit erhalten.

Anmerkungen die Standlinie betr

§. 185. **I.** Wenn die Punkte A, B
Felde sowohl unter sich als auch von de
linie sehr weit wegliegen, und es die
nicht zulassen, die Standlinie CD
und bequem anzunehmen, so werden di
CAD, CBD in solchem Falle oft sehr
den, und dieses verursacht, 1) daß si
nien CA, DA, CB, DB, sehr aneina
schleifen, wodurch also auf dem Meßti
die gezogenen Linien eine körperliche Di
selten recht genau die wahren Durchschni
angegeben werden. 2) daß die Weite
noch sehr unsicher gefunden wird, wenn
gleich die Winkel mit dem Astrolabio
und AB durch Rechnung finden wolte.
die Folge wird lehren, daß, wenn die
CAD, CBD, sehr klein werden,
ACD + ADC oder BCD + BDC sehr
180° kommen, alsdann kleine Fehler,
bey Messung der Winkel an beyden St
ten begehet, auf die gesuchte Weite
großen Einfluß haben, und sie n
desto grössern Unrichtigkeit geben, j
CAD, CBD sind.

Zur Richtigkeit des Verfahrens, m
also 1) eine sehr kleine Standlinie ve
2) dafür sorgen, daß man an ihr nicht zu

her spitze Winkel erhält. Oft läst sich aber we-
en der unbequemen Lage der Gegend, keine
Standlinie unmittelbar messen die den erwähn-
n Bedingungen ein Gnüge leistet Wie wird
an also bey solchen Umständen verfahren?

Es sey Fig XLIII. AB die auszumessende Ent-
rnung; die Gegend verstatte es nicht eine größere
nd bequemere Standlinie als die CD unmittel-
ar zu messen. Da nun CD so liegt daß z. E.
ey D ein paar sehr stumpfe Winkel CDA, CDB,
orkommen, und dieses der Richtigkeit in Be-
immung der Weite AB nachtheilig ist, so wähle
an eine andere Standlinie CE, wenn man sie
leich nicht unmittelbar messen kan, und nehme
e von einer solchen Grösse, und Lage, wie nach
en vorhergehenden Bedingungen erfordert wird.
Da man sie aber nicht unmittelbar messen kan, so
ediene man sich der erstern Standlinie CD, und
estimme aus ihr die zwote CE; hier würde man
lso z. E. bey C, D, die beyden Winkel DCE,
DE, messen, und in dem Dreyecke CDE, aus
en erwähnten Winkeln, und der unmittelbar ge-
nessenen CD, die neue Standlinie CE berechnen.
Dieser Standlinie CE bediene man sich nun zur
Bestimmung der Weite AB, indem man an
hr, die Winkel ACB, ACE, CEA, CEB
nisset ꝛc. so wird man AB gewiß viel richtiger
inden, als es vermittelst der blossen Standlinie
CD geschehen könte.

Fände man, daß die neue Standlini
nicht groß genug wäre, oder gegen
schickliche Lage hätte, so könte man au
abermahls eine neue Standlinie bestim
auf diese Art so lange fortfahren, bis
AB eine schickliche und gehörige
erhielte.

Dieses Mittel aus einer kleinen
schicklichen Standlinie wie CD, immer
und bequemern fortzugehen, lehret unt
Taquet (S. dessen Opera mathem.
1707. Geom. pract. lib. I. Cap. V. P

II. Wenn in den bisherigen Auflö
vorgelegten Aufgabe, die angenomme
linie horizontal ist, und die Winkel a
horizontal gemessen werden, so erhält
Rechnung oder Zeichnung, eigentlich
zontalabstand der Objekte A, B, und
langt man doch gewöhnlich, sowohl b
fung ganzer Landschaften, als auch,
von der bloßen Entfernung der
A, B, redet.

Die Winkel kan man nun in d
Fällen immer horizontal messen, wenn
zeug mit einer Kippregel versehen ist
beym horizontalen Stande des In
nach den erhabenen Gegenständen A,
tet. Hat aber das Werkzeug keine

so muß man an den Standpunkten die schiefen Winkel messen, und aus den Neigungen ihrer Schenkel gegen den Horizont, welche man entweder nach dem Augenmaaße annehmen, oder auch selbst messen kan, die Hortzontalwinkel nach den Vorschriften des X Kapitels durch Rechnung bestimmen.

Die Standlinie läst sich aber nicht immer genau horizontal annehmen u. messen. In diesem Falle muß man aus den Umständen beurtheilen, ob man ihre Schiefe, wenn sie nicht sehr beträchtlich ist, ausser Acht lassen kan, oder ob man genöthigt ist, ihre horizontale Grösse durch Nivelliren, oder nach andern Metoden wie z. E. nach den §§ 38. 41. 44 u. s. w. zu bestimmen.

III. Bey Entwerfung ganzer Landschaften, nimt man oft die Entfernung zwoer Bergspitzen, zweener Thürme u. s. w. zu Standlinien an. Diese Standlinien kan man selten unmittelbar messen, und selten liegen die Standpunkte in einer Horizontalebene. In diesem Falle werden nun dergleichen Standlinien nach der Methode (I) aus einer andern vorher durch Rechnung bestimt.

Aufgabe.

§. 186; A, B, C Fig. XLIV sind drey Oerter auf dem Felde, deren Lage gegen einander be-

kant ist; D ist ein vierter Ort; man
wie weit er von denen A, B, C, entf

Aufl. Um die Lage der drey Obje
stimmen, so seyen in dem Dreyecke A
ben, oder bekant, die Seiten AB = b
und der eingeschlossene Winkel ABC =
erhellet, daß man auch andere Stücke de
als gegeben ansehen könne, wenn si
Dreyeck bestimmen.

II. Man messe nun an dem Orte D
den Winkel ADB = δ, BDC = ε,
sich daraus die Entfernungen AD,
durch trigonometrische Rechnung finde

II. Man nenne den unbekanten
BAD = x, so ist in dem Vierecke AB
Winkel

$$BCD = 360° - ABC - BAD -$$
$$= 360° - \beta - x - \delta -$$
$$= \mu - x$$

wenn man der Kürze halber

$$360° - \beta - \delta - \varepsilon = \mu$$ nennet.

IV. Nun hat man in den beyden
BAD, BDC

$$\sin ADB : AB = \sin BAD : BD$$
$$\sin BDC : BC = \sin BCD : BD$$

oder $\sin \delta : b = \sin x : BD$

$\sin \varepsilon : c = \sin(\mu - x) : BD$

also $BD = \frac{b \sin x}{\sin \delta}$; $BD = \frac{c \sin(\mu - x)}{\sin \varepsilon}$

folglich $\frac{b \sin \varepsilon}{c \sin \delta} = \frac{\sin(\mu - x)}{\sin x}$

Aber aus (Trig. S. XII. 2) folgt

$$\frac{\sin(\mu - x)}{\sin x} = \frac{\sin \mu \cos x - \sin x \cos \mu}{\sin x}$$

$$= \sin \mu \cot x - \cos \mu$$

also ist $\cos \mu + \frac{b \sin \varepsilon}{c \sin \delta} = \sin \mu \cot x$

Mithin wegen $\frac{\cos \mu}{\sin \mu} = \cot \mu$ Der Werth von

$$\cot x = \cot \mu + \frac{b \sin \varepsilon}{c \sin \delta \sin \mu}$$

V. Ist nun auf solche Art der Winkel x gefunden, so hat man aus (IV) auch die Weite BD, und in den Dreyecken ABD, BCD ist genug bekant, um die Seiten AD, CD durch Rechnung zu finden.

VI. Bey Berechnung der Cotangente des Winkels x ist zu bemerken, daß alle trigonometrische Linien für den Sinus totus = 1 genommen

men werden müssen, und wenn für
negativer Werth herauskömt, so zeigt
daß der Winkel x stumpf sey. Man
in solchem Falle einen spitzen Winkel d
gente eben den bejahten Werth hat,
diesem Winkel 90°, so hat man den ei
stumpfen Winkel x.

Ex. es sey $\beta = 115°$; $\delta = 25°$;
$b = 1112$ Fuß, $c = 2000$ Fuß,
$\mu = 175°$ mithin

$\log b = 3{,}0461048$
$\log \sin \varepsilon = 9{,}8994850 —$

$\log b \sin \varepsilon = 2{,}8955898$

Ferner $\log c = 3{,}3010300$
$\log \sin \delta = 9{,}6259483 —$
$\log \sin \mu = 8{,}9402960 —$

$l\, c \sin \delta \sin \mu = 1{,}8672743$ daß

$$l \frac{b \sin \varepsilon}{c \sin \delta \sin \mu} = 1{,}0283155$$

welches die Grösse $\frac{b \sin \varepsilon}{c \sin \delta \sin \mu} — = 10{,}67$

Nun ist $\cot \mu = \cot 175° = \cot (9$
$= — \tang 85°$ (Trig. S. XXII) $= —$
dies giebt demnach
$\cot x = — 11{,}43005 + 10{,}67371 = —$

Da also hier cot x verneint wird so ist x umpf.

Man suche also einen spitzen Winkel dessen Tangente 0,75634 ist — Man findet ihn in den Tafeln = 37° 6′ addire 90° dazu so wird x = 127° 6′.

Die Berechnung der Seiten AD, BD, CD, werde ich hier nicht vornehmen, denn sie ist, nachdem man den Winkel BAD = 127° 6′, mithin auch die übrigen Winkel ABD, DBC, BCD, gefunden hat, nach den Proportionen

sin δ : b = sin x : BD

sin δ : b = sin ABD : AD wo ABD = 180° — x — δ

u. s. w.

gar leicht durch Logarithmen anzustellen.

VII. So kan man, indem man bloß an dem Standpunkte D, die zween Winkel δ, ε misset, leicht die Weiten AD, BD, DC durch Rechnung, so genau man will finden. Man kan aber wenn es um keine sehr große Schärfe zu thun ist, die Weiten AD, BD, DC durch eine geometrische Konstruction finden.

Nachdem man in Fig. XLV ein Dreyeck abc, auf dem Papiere beschrieben hat, welches dem ABC auf dem Felde ähnlich ist, so beschreibe man ferner über der Seite ac einen Kreiß, der-

gestalt, daß ac die Chorde eines Bo
werde, der doppelt so groß ist, als de
des auf dem Felde observirten Wink
Nehme hierauf von a bis m die Cho
Bogens am der doppelt so groß ist al
dem Felde beobachtete Winkel ADB, z
m, b, eine gerade Linie mbd, so wird
d im Umfange des Kreises einen Punkt b
der gegen die Punkte a, b, c eben so
D auf dem Felde in Absicht der Oerter
und die Weiten ad, bd, dc, werden
BD, DC auf dem Felde gemäß seyn.

Bew. Denn weil der Winkel adc
kreise zu seinem Maaße den halben Bo
hat, und der Bogen amc doppelt so viel
hält, als der Winkel DC auf dem Fe
klar, daß der Winkel adc = ADC sey

Auf eben die Art ist auch der Wi
vermöge der Konstruction = ADB.

Es muß also der Punkt d gegen die
b, c nothwendig eben die Lage haben,
gegen A, B, C, hat, weil durch das
abc, und die beyden Winkel adb, a
Punkt d, völlig so bestimmt ist, so w
vermöge des Dreyecks ABC, und der
Winkel ADB, ADC ist.

Mithin müssen die Weiten ad, bd, cd, nach dem verjüngten Maaßstabe, womit man das Dreyeck abc aufgetragen hat, denen AD, BD, CD gemäß seyn.

VIII. Wegen der Ziehung des Kreises amcd, muß ich noch folgendes erinnern.

Um dessen Halbmesser zu finden bediene man sich des geradelinigten Transporteurs oder noch besser eines tausentheiligten Maaßstabes auf folgende Art.

Man verzeichne Fig. XLVI einen willkürlichen Winkel KIM, trage von I bis K, den Halbmesser des geradelinigten Transporteurs, oder tausend Theile des tausentheiligten Maaßstabes, von I bis L die Chorde oder Seite ac des Dreyecks abc, Fig. XLV, von I bis M die Chorde des doppelten Winkels ADC oder adc nach dem tausentheiligten Maaßstabe; (z. E. die Chorde von $2(\delta + \varepsilon) = 140°$ in dem Beyspiele VI) ziehe durch K, M, eine gerade Linie und durch L mit KM eine parallele, so wird, wie sich leicht übersehen läßt, IN der Halbmesser eines Kreises seyn, für welchen ac die Chorde von $2 . adc = 2(\delta + \varepsilon)$ ist. Man fasse also IN mit dem Zirkel, und beschreibe aus a, c, ein paar sich beyn durchschneidende Kreisbogen, so wird n der Mittelpunkt des zu ziehenden Kreises amcd seyn.

Um

Um die Chorde am einzutragen so
Fig. XLVI von 1 bis r die Chorde des
Winkels ADB = δ, nach dem tause
Maaßstabe, und ziehe hierauf mit Kr
eine parallele Np, so wird lp die Ch
dieses Winkels, für den Halbmesser d
amcd seyn, die man daher von a bis
Kreiß einzutragen hat.

Hrn. Mech. Branders mechanisch
sung dieser Aufgabe.

§. 187. H. M. Br. giebt dieselbe
Beschreibung eines Meßtisches, am E
Aufsatzes, und verfährt auf dem Fel
dergestalt. Fig. XLVII.

Man bringe über den Standpunk
Meßtischgen und bestimme auf demse
Punkt d, lothrecht über D. Au
he man auf dem Papiere nach
jecten A, B, C, die Richtungslin
dβ, dγ. Nun seyen OE, OF ein pa
dergestalt mit einander verbunden, daß
die Figur ausweiset, um eine Axe bey
gefähr wie die Schenkel eines Zirkels
Kopf, beweglich sind, und durch eine
nach Gefallen in jeder Oeffnung fes
werden können.

Beyde Liniale OE, OF, seyen bey i, k, mit in paar Hülsen versehen, an denen sich sehr charfe stählerne Spitzen, oder Stifte a, c, befinden, welche sich zugleich mit den Hülsen längst den Linialen verschieben lassen. Unter dem Umdrehungspunkt O, befinde sich eine dritte dergleichen Spitze b. So stellet also dieses Werkzeug gleichsam einen dreyspitzigten Stangenzirkel vor, und durch gehörige Verschiebung der Hülsen sowohl, als auch durch gehörige Oefnung der beyden Liniale wird man machen können, daß zwischen den drey Spitzen, a, b, c ein beliebiges Dreyeck enthalten ist. Um nun dieses Werkzeug zu gegenwärtiger Absicht zu brauchen, so fasse man auf einem verjüngten Maaßstabe, zwischen die drey Spitzen, a, b, c, die drey Seiten des Dreyecks ABC, so, daß die Weiten ab, bc, ac, denen AB, BC, AC gemäß werden. Setze nun den Stangenzirkel auf die gezogenen Richtungslinien $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$, dergestalt, daß jede Spitze a, b, c auf die entsprechende Richtungslinie $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$ zu stehen komme, mithin das kleine Dreyeck abc auf dem Meßtische gegen den Punkt d, eben die Lage bekomme, die das Dreyeck ABC gegen D hat, so wird man auf dem Meßtische die Weiten da, db, dc erhalten, welche nach dem verjüngten Maaßstabe, denen DA, DB, DC gemäß seyn werden.

Die-

Dieses ist ein Verfahren, welches Versicherung Hrn. Branders auf dem geschwind von statten gehet.

Statt eines solchen Stangenzirkels Spitzen könte man sich auch Handzirkel die mit drey Schenkeln versehen sind, d man unterweilen in Reiszeugen antrif Leupolds Theatro Machinarum beschrieben findet.

Zus. Weil die Entfernungen da, ab, bc, denen DA, DB, DC, AB, B sind, weil folglich in den Dreyecken da da : ab = DA : AB und in den Dreye DBC, dc : cb = DC : CB ist, so sind ten ab mit AB und bc mit BC und auf Art auch ac mit AC parallel.

Anmerkungen.

§. 188. 1. Diese Aufgabe, ist ni wie bisher gelehret worden, in Mes Weiten von grossem Nutzen, sondern selbst bey Entwerfung ganzer Landscha Vortheil angewandt werden.

Hr. Clairaut (Anfangsgr. d. Geo dem Französischen von F. J. Bierling l §. XXII) und Hr. Lambert in seinen 2 gen zur practischen Geometrie §. 109 deln die bisherige Aufgabe gleichfalls u pfehlen sie den Feldmessern.

II. Bey Auflösung der bisherigen Aufgabe
ehet man den Lothrecht über D liegenden Punkt d
uf dem Meßtische als gegeben an, und bestimt
e Weiten da, db, dc, dadurch, daß man
em ganzen Dreyecke abc, seine gehörige Lage
gen d giebt. Die Auflösung würde aber ganz
nders ausfallen, wenn das Dreyeck auf dem
Meßtische bereits vorgezeichnet wäre, und der
unkt d gesucht werden solte. In diesem Falle
ürde offenbar Hrn. Branders Auflösung einiger
bänderung bedürfen. Indessen ist aber die
ztere Frage, ungleich wichtiger bey Entwer-
ung der Landschaften. Wenn es bloß darum zu
un ist, die Weiten DA, DB, DC auf dem
elde zu bestimmen, so kan man nach Hrn.
Branders Art verfahren; Wenn aber A, B, C,
rey Oerter auf dem Felde sind die man bereits
urch a, b, c, auf dem Meßtische entworfen
at, und soll nun den Standort des Meßtisches
, durch den Punkt d auf dem Meßtische an-
eben, so daß d gegen die bereits verzeichne-
en Punkte a, b, c, eben die Lage bekömt,
ie D gen A, B, C, hat, so muß man offenbar
uf eine andere Auflösung bedacht seyn.

Man siehet leicht, daß in dem letztern Falle
ie Hauptsache darauf ankomme, den Meßtisch
o zu stellen, daß die Seiten ab, bc, ca, mit den
ugehörigen AB, BC, AC, eine parallele Lage
rhalten (§. 187. Zus.) denn unter solchen Um-

ständen,

ständen, darf man nur an die Punk
die dioptrische Regel legen, nach der
A, B, C visiren, und die Richtung
βb, γc, rückwärts verlängern, so
sich insgesamt auf dem Meßtische be
schneiden, und solchergestalt den verlan
d angeben, der gegen a, b, c, di
haben wird, die D gegen A, B, C,

In der Folge werde ich nun zeigen
bey D dem Meßtische eine solche L
könne, daß ab, bc, ac den zugehör
auf dem Felde AB, BC, AC parall

III. In der bisherigen Aufgabe lieg
Punkte A, B, C nicht in einer gera
sie können aber auch wie in der Fig.
einer geraden Linie liegen, und so ist
denn ein besonderer Fall der allgemei
sung in §. 186 III. IV. Es ist alsden
tige Winkel β hier $= 180°$, und d
Winkel x, hier der DAC.

Nicht gar zu große Weiten aus
einzigen Stande zu messen

§. 189. 1. Man hat verschiedene Werk
gedacht, aus einer sehr kleinen Standlini
von einigen Fussen, dennoch mit e
Genauigkeit, Entfernungen zu mes
man nennet diese Messungsart, die

us einem einzigen Stande, weil man eine kleine Standlinie, ohne sich weit von der Stelle zu bewegen, erhalten und messen kan. Um nun aus so kleinen Standlinien, Entfernungen zu messen, so sind die zu dieser Absicht erfundenen Werkzeuge vorzüglich dahin gerichtet, die sogenanten parallactischen Winkel mit grosser Schärfe zu messen.

2. Es sey Fig. XLIX AB eine sehr kleine Standlinie, und C ein Gegenstand, dessen Weite CA oder CB man finden soll, so heist der Winkel ACB, welcher der Standlinie AB gegenüber stehet, der parallactische Winkel, oder die scheinbare Grösse der Standlinie am Punkte C.

3. Nun erhellet, daß, wenn AB sehr klein, AC, BC, aber beträchtlich groß sind, auch der parallactische Winkel C sehr klein seyn werde.

4. Da eine so kleine Standlinie immer nach unserer Willkühr gelegt werden kan, so kan man AB so annehmen, daß der Winkel CAB ein rechter ist, oder wenigstens einem rechten sehr nahe kömt. Geschiehet dieses, so wird auch B beynahe ein rechter Winkel seyn; daher kan man ohne merklichen Irrthum ACB als ein gleichschenklichtes Dreyeck ansehen, und es erhellet, daß man aus der Grösse des parall. Winkels C und der Standlinie AB, die Weiten AC, BC durch Rechnung finden könne. Es wird nemlich

sin C : AB = sin tot : BC oder BC = $\frac{AB}{\sin C}$ weil ich sin tot = 1 setze.

sehr klein, mithin ohne merklichen sin C = C (oder = $\frac{C}{206264}$ wenn kunden gegeben wäre), so findet sich

$$BC = AC = \frac{AB}{C} . 206264$$

5. Es kömt also nur darauf an, den schen Winkel C ausfindig zu machen. sten wäre es, wenn man würklich no kommen und diesen Winkel messen kö dieser Winkel sehr klein ist, so würde bloß, ohne einen Winkelmesser, ver nes Fernrohres, das mit einem Micro sehen wäre (§. 182 u. f.) messen können, nemlich untersuchte, wie viel Schrau hungen, oder Abtheilungen eines Gla ters, dem Bilde der Standlinie AB rohre bey C, zugehörten. Vorausge des Fernrohrs Feld, die scheinbare G noch fasset.

6. Weil man aber auf solche von dem Standorte bey A oder B ben müste, und die Absicht ist, A oder B sogleich die Grösse des par

Winkels C auszufinden, so hat man andere Werkzeuge und Hülfsmittel erfunden, diesen Endzweck zu erreichen.

7. Man könte denken, wozu sind neue Werkzeuge nöthig? Man messe mit dem Astrolabio bey A, B, die beyden Winkel A, B, so hat man auch $C = 180° - A - B$

8. Allein man überlege, daß, wegen der geringen Grösse der Standlinie AB, theils das Werkzeug nicht mit der gehörigen Genauigkeit bestellet werden kan, theils auch die geometrischen Winkelmesser von gewöhnlicher Grösse, bey weitem nicht die gehörige Schärfe, bey Ausmessung dieser Winkel verstatten. Denn man müste A, B, wenigstens bis auf einige wenige Sekunden genau messen können, wenn man den parallactischen Winkel so genau finden wolte, als beym Gebrauche einer so kleinen Standlinie nothwendig ist. Wie würde man aber dieses von Astrolabiis, die einen, oder wohl selbst $1\frac{1}{2}$ Fuß, im Durchmesser hätten, erwarten können? Andere Hinderniße zu geschweigen.

9. Man stelle sich Fig. L durch A, B ein paar parallele Linien, Am, Bn vor, die mit CA, CB, die kleinen Winkel mAC, CBn machen; auch durch C mit mA, nB, eine paralleIe Cr, so wäre der parallactische Winkel ACB bekannt, wenn man die kleinen Winkel mAC, CBn wüste. Denn hier

wäre z. E. ACB = ACr + rCB = m
weil die Linien parallel sind.

10. Oder man gedenke sich in Fig.
A mit BC eine parallele Aw so hätte n
falls den parallactischen Winkel, wenn
messen könte.

11. Auf diese beyden letztern Sätz
gründen sich nun die Werkzeuge, pa
Winkel zu messen, ohne selbst nach
hen, und da die Winkel, wie mAC, nCB,
(11) nur klein sind, so erhellet, daß zu
derselben kein eingetheilter Rand v
Graden nöthig sey;

12. Ob aber gleich dieses ein Vor
eine Ersparung der Kosten zu seyn s
darf man doch nicht erwarten, dergleic
zeuge, so kleine Winkel zu messen,
wohlseilen Preis zu bekommen. U
überzeugt zu werden, so will ich nur e
kurzen Begrif, von dem zu dieser Ab
denen Paceccianischen Pantometro b

13. Dieses Werkzeug bestehet Fig
zwoen hölzernen Tafeln A, B, die
durch Gewinde an einander hängen, u
mengelegt werden können. OO, oo,
Fernröhre, wenigstens $1\frac{1}{2}$ Fuß lang,
oo unbeweglich ist, das andere OO

ner Alhidadenregel, um das Centrum c, eben
ie bey einem Winkelmesser gedrehet werden
n; de ist ein in die hölzerne Tafel A eingelasse-
s Stück Messing, worauf aus dem Mittel-
unkt c einige Bogen gerissen sind, worauf sich
radabtheilungen befinden, über die sich ein In-
r, bey Umdrehung der Alhidadenregel ver-
hiebt; die sanften Umdrehungen des Fernrohres,
hält man aber vermittelst einer Micrometer-
hraube bey r.

Die Axen der beyden Fernröhre können nun
ermittelst sehr weit entlegener Gegenstände, oder
uf andere Arten, genau in eine parallele Lage
ebracht werden, und wenn sie vollkommen pa-
allel sind, so beträgt ihr Abstand Oo etwa
bis 5 Fuß, den man aber übrigens sehr genau
bmessen muß, weil er bey Bestimmung der pa-
allactischen Winkel, die Standlinie abgiebt.

14. Der Gebrauch dieses Instruments ist
un dieser.

Bey Ausmessung eines parallactischen Win-
els C, Fig. LI bedeute AB, den Abstand der bey-
en parallel gestellten Fernröhre (13). Man bringe
un durch gehörige Stellung des ganzen Werk-
eugs, das unbewegliche Fernrohr oo genau in die
Richtung nach C. so wird das bewegliche OO weil
s dem unbeweglichen parallel ist, die Richtung
Aw, haben, die der BC gleichlaufend ist. Das

Objekt C, wenn es also in der Axe
weglichen Fernrohrs erscheinet, wird
gleich in der Axe des beweglichen erschei
dern, um den parallactischen Winkel wA
davon abstehen. Drehet man also da
liche Fernrohr bis das Objekt C in d
erscheinet, so wird man sowohl durch U
der Micrometerschraube als auch durch
des Indicis auf den Gradabtheilun
Grösse des parallactischen Winkels CAw

15. Dieser ganz kurze Unterricht,
schon einigermaaßen, zu erkenne
worauf es bey dergleichen Werkzeugen a
zugleich wird man aber ohne Mühe
wie viele Beschwerlichkeiten, so wohl in
Stellung des Werkzeugs, als auch
vieler andern Ursachen, zu befürchten sin
aber ein solches Werkzeug, wenn a
desselben sehr fleißig und dauerhaft gearb
und alle nöthige Vollkommenheit hab
um keinen geringen Preiß verfertig
könne, wird man leicht begreifen.

16. Man hat zwar noch andere Erfi
durch Hülfe einiger Spiegel, in Ve
mit einem Fernrohre, parallactische W
messen; aber immer bleiben doch de
Werkzeuge sehr kostbar.

Das in (13) beschriebene Werkzeug rührt vom Grafen *Pacecco ab Ucedos* her und man hat davon eine Beschreibung unter dem Titel *Pantometrum Paceccianum, seu instrumentum novum pro elicienda ex una statione Distantia loci inaccessa* welche vom Hrn. P. Mayer zu Mannheim 1767 herausgekommen ist. In dieser Schrift wird erwähnt, daß der Churfürst von der Pfalz für dieses Instrument 1000 Gulden bezahlt habe.

Wenn auch gleich dieses Werkzeug für einen wohlfeilern Preiß verfertigt werden könte, so sehe ich doch nicht ein, warum man, blos um Weiten aus einem einzigen Stande zu messen, die Kosten an ein solches, zu anderen Vermessungen, sonst unbrauchbares Werkzeug, verwenden will. Und dennoch geben sehr kleine parallactische Winkel, die Entfernungen nicht einmal mit erträglicher Schärfe; und wenn kömt eben der Fall vor, daß es nothwendig ist, aus sehr kleinen Standlinien Weiten zu messen? — Meistens wird man doch auf dem Felde, immer Standlinien von erträglicher Länge finden, mithin das bloße Astrolabium zu Messung der Winkel gebrauchen können.

Indessen hat doch die Societät der Wissenschaften in Koppenhagen, eine Preißfrage fürs Jahr 1778 aufgegeben, worin die beste Einrichtung solcher Instrumente Weiten aus einem

Stande zu messen, und dann die dam
haltende Genauigkeit, verlangt wird.
Leipz Gelehrten Anzeigen 1777. das S
12 Jun.) Ich zweifle ob ein einfach
das Paceccianische Pantometrum, d
beantworten wird.

XVI. Kapitel.

Von Ausmessung der Höhe

§. 190. Aufg. Die Höhe Kl Fig. L
Objekts K, übe
rizontallinie IC zu messen; vorausgesetzt,
von einem angenommenen Stande C h
nach I hinmessen kan.

Auft. Man bringe den Winkelmesse
dergestalt, daß ein Loch aus des vertic
ten Werkzeugs Mittelpunkt c gerade auf
würde, und messe nach §. 155 den Ver
kel Kcw, wo cw eine Horizontallinie
Da ich nun Kl auf der Horizontalfläche
annehme, welches z. E. bey Thürmen
statt findet, so ist Kwc ein rechtwi
Dreyeck, und wc = Cl. Man messe
so kan man in dem Dreyecke Icw die H
finden, wenn man schliesset cw oder Cl :

n tot : tang Kcw . dies giebt für sin tot = 1,
Kw = Cl . tang Kcw mithin Kl = Kw + wl
= Kw + cC = Cl tang Kcw + cC, wo cC
ie Höhe des Werkzeugs über dem Boden be-
eutet, die man leicht messen kan.

§. 191. Aufg. Wenn man auf der Horizon-
talebene ICD, von dem angenommenen Stand-
unkte C, nicht nach I hinmessen kan, demohn-
rachtet die Höhe KI zu finden.

Aufl. In diesem Falle nehme man eine
Standlinie CD an, dergestalt aber, daß CD,
mit KI in einer und derselben Ebene KID liege.

Man messe hierauf, wie in der ersten Aufgabe,
ber C den Verticalwinkel Kcw, und bemerke
ugleich den Punkt w, welchen an dem Objekte
KI, das horizontalgestellte Fernrohr co bedecket.

Hierauf bringe man den Winkelmesser
iber D, erhöhe das Stativ so lange, bis man
urch den horizontalgestellten Tubum γo, wie-
er das bey w bemerkte Zeichen wahrnimt; und
nesse demnächst den Verticalwinkel Kγw so wird
nan aus den beyden Verticalwinkeln Kcw = α
Kγw = β, und der gemessenen Standlinie
CD = cγ, = b, die Höhe Kw auf folgende
Art berechnen.

In dem Dreyecke Kcγ ist der Winkel
cKγ = α — β

Mithin

$$\sin(\alpha - \beta) : b = \sin\beta : Kc \text{ also}$$

$$\frac{b \sin \beta}{\sin(\alpha - \beta)}; \text{ Ferner } Kc : Kw = \sin t$$

$$\text{mithin } Kw = Kc \sin\alpha = \frac{b \sin\beta \sin}{\sin(\alpha - \beta}$$

Also durch Logarithmen

$$\log Kw = \log b + l\sin\alpha + l\sin\beta - l\sin$$

Hat man Kw gefunden, so addiret n
Werkzeugs Höhe $cC = \gamma D$ hinzu, um d
Höhe Kl zu erha ten.

Zus I. Das bey w bemerkte Zeiche
eigentlich dazu, bey der zwoten Station l
Werkzeuge wieder genau dieselbe Höhe ü
Horizonte zu geben, die es beym ersten
hatte.

Läst sich bey w kein Merkmahl an de
jekte Kl finden, so stecke man in einiger
nung von C, bey L einen Stab, in die
calebene des auszumessenden Winkels a
lasse auf ihm von einem Gehülfen den
bemerken, auf den die Axe des horizonta
teten Fernrohres co hintrift. Alsdann
man beym zweiten Stande D sich nur n
Punkt e zu richten.

Zus. II. In den meisten Fällen kan man an beyden Stationen C, D, die Höhen des Werkzeugs cC, γD, ausser Acht lassen, besonders wenn die Standpunkte C, D, einigermaassen weit von dem Objekte Kl entfernt sind. Denn es verursacht in Bestimmung der Höhe Kw keinen merklichen Irrthum, wenn gleich über dem Standpunkte D das Werkzeug z. E. einen halben Fuß höher oder niedriger stände, als bey C

§ 192. Aufg. Eine Höhe Kl Fig. LIV. Tab. IV zu finden, wenn man von einem angenommenen Standpunkt c, nicht horizontal nach l hinmessen kan, sondern genöthigt ist, die Standlinie cl schief anzunehmen.

I Fall, wenn c höher liegt als l.

Man bringe bey c, wo ich des Winkelmessers Mittelpunkt annehme, das Fernrohr in eine horizontale Richtung co, welche verlängert bey m in das verticale Objekt Kl einschneide. Man richte nun das Fernrohr nach K, und dann nach l, und messe die beyden Verticalwinkel Kcm, mCl, so wird sich aus diesen beyden Winkeln Kcm = α, mcl = β, und der gemessenen schiefen Linie cl = a, die Höhe Kl auf folgende Art bestimmen.

In dem rechtwinklichten Dreyecke Kcm ist der Winkel K = 90° — Kcm = 90° — α

Man

Man schließe also in dem Dreyecke Kcl

sin K : cl = sin Kcl : Kl oder

col α : a = sin (α + β) : Kl

$$\text{dies giebt also } Kl = \frac{a \sin(\alpha + \beta)}{\text{col } \alpha}$$

II Fall, wenn, wie in Fig. LV, c niedriger liegt als I. Dann messe man die beyden Elevationswinkel Kcm = α, mCl = β, so ist jetzt in dem Dreyecke Kcl der Winkel K = 90° — α und Kcl = α — β, und daher wegen sin K : cl = sin Kcl : Kl, wird jetzt

$$Kl = \frac{a \sin(\alpha - \beta)}{\text{col } \alpha}$$

wo man sowohl im ersten, als zweiten Fall die gesuchte Höhe durch Logarithmen findet.

§. 193. Aufg. Eine Höhe KI Fig. LVI zu finden, wenn man genöthigt ist, die Standlinie auf einer schiefen Ebene anzunehmen, und man von dem ersten Standpunkte c nicht, wie in vorhergehender Aufgabe, gerade zu, nach I hinmessen kan.

Aufl. Man nehme eine Standlinie c-γ an; und messe erstlich bey der Station c, wo cm die verlängerte Axe des horizontal gerichteten Fernrohres bedeutet, den Elevationswinkel Kcm = α, und Depressionswinkel mcl = β.

Hier-

Hierauf messe man an der zwoten Station, γ, wo γn, eine Horizontallinie bedeutet, auf gleiche Weise den Elev. Winkel $n\gamma K = \gamma$, und Depress. Winkel $n\gamma I = \delta$.

Wenn nun die gemessene Standlinie $c\gamma = a$ heist, so wird die Höhe KI auf folgende Art berechnet.

Der Kürze halber benenne man den Winkel $K\gamma I = \gamma + \delta$, mit dem Buchstaben ε.

So ist in dem Dreyecke $Kc\gamma$ der Winkel

$$cK\gamma = KcI - K\gamma c = \alpha + \beta - \varepsilon$$

und $\sin cK\gamma : c\gamma = \sin K\gamma c : Kc$ dies giebt

$$Kc = \frac{a \sin \varepsilon}{\sin (\alpha + \beta - \varepsilon)}$$

Nun ist der Winkel $I = 90° - mcI =$ $90° - \beta$ und $\sin I : Kc = \sin KcI : KI$ oder

$$\cos \beta : \frac{a \sin \varepsilon}{\sin (\alpha + \beta - \varepsilon)} = \sin (\alpha + \beta) : KI$$

also

$$KI = \frac{a \sin \varepsilon \sin (\alpha + \beta)}{\cos \beta \sin (\alpha + \beta - \varepsilon)}$$

mithin durch Logarithmen

$$\log KI = \log a + \log \sin \varepsilon + \log \sin (\alpha + \beta) - (\log \cos \beta + \log \sin (\alpha + \beta - \varepsilon)$$

Zus.

Zuſ. Die gegebene Auflöſung gründet ſich darauf daß die Punkte c, γ höher als I liegen, es iſt keine Schwürigkeit auch eine Formel zu finden, wenn die Punkte niedriger liegen als I, wie in der LVII Figur.

Man nenne die Winkel in dieſer Figur eben ſo wie in der LVI Fig. nemlich mcK = α, mcI = β; Kγn = γ, nγI = δ jetzt aber den Unterſchied γ — δ, oder den Winkel KγI = ε ſo wird nach einer ähnlichen Rechnung

$$KI = \frac{a \operatorname{ſin} \varepsilon \operatorname{ſin} (\alpha - \beta)}{\operatorname{coſ} \beta \operatorname{ſin} (\alpha - \beta - \varepsilon)}$$

Zuſ. In dem Dreyecke Kγc iſt (Fig. LVI)

$$\operatorname{ſin}(\alpha + \beta - \varepsilon) : a = \operatorname{ſin}(\alpha + \beta) : K\gamma$$

$$\text{alſo } K\gamma = \frac{a \operatorname{ſin} (\alpha + \beta)}{\operatorname{ſin} (\alpha + \beta - \varepsilon)};$$ dies giebt dann ferner in dem rechtwinklichten Dreyecke Kγn die Erhöhung

$$Kn = K\gamma . \operatorname{ſin} \gamma = \frac{a \operatorname{ſin} (\alpha + \beta) \operatorname{ſin} \gamma}{\operatorname{ſin} (\alpha + \beta - \varepsilon)}$$

$$\gamma n = K\gamma \operatorname{coſ} \gamma = \frac{a \operatorname{ſin} (\alpha + \beta) \operatorname{coſ} \gamma}{\operatorname{ſin} (\alpha + \beta - \varepsilon)}$$

Auf eine ähnliche Art findet man auch an dem Stande c, die Werthe von Km, cm,

Sol-

Solchergestalt, findet man also durch Messung der oberwähnten Verticalwinkel, nicht allein, wie hoch der Punkt K des Objekts, KI, über denen durch γ, c, eingebildeten Horizontallinien γn, cm liegt, sondern, man weiß auch wie groß die Horizontalweiten, der beyden Standpunkte c, γ, von dem Objekte KI sind.

Auf diese Art dienen also auch Verticalwinkel, selbst zu Messung der Horizontalweiten.

Anmerkung.

§. 194. In vielen Fällen, ist es unbequem, Höhen aus einer schiefen Standlinie zu messen. Auch wird hiebey zum vorausgesetzt, daß die Standlinie cγ eine gerade Linie sey, oder wenigstens von ihr so wenig abweiche, daß man den Fehler ausser Acht lassen kan. Da nun wenn z. E. Icγ die abhängige Richtung eines Berges vorstellete, die letztere Bedingung, meistens nicht statt findet, also sehr selten, längst der Anhöhe, eine beträchtlich große, und gerade Standlinie angenommen werden kan, so wird folgende Aufgabe zu Ausmessung der Höhen bessere Dienste leisten.

§. 195. Aufg. Aus einer Standlinie, die nicht, wie in vorhergehenden Aufgaben, mit der auszumessenden Höhe, in einer und derselben Verticalebene liegt, die Höhe zu finden.

Aufl.

Aufl. Man nehme Fig. LVII für die auszumessende Höhe KI (z. E. eines Berges) eine willkührliche Standlinie CD an. Hier kan CD jede Lage gegen KI haben, wenn nur CD horizontal ist, oder nicht viel davon abweicht. Man messe CD und nenne sie = a.

Man stelle sich nun bey C oder D, eine horizontalebene vor, welche die Verticallinie von der Spitze des Berges, in I durchschneide.

Um nun diese Höhe KI, über der durch C oder D gehenden Horizontalfläche zu finden, so stelle man sich die beyden Horizontallinien CI, DI gezogen vor, und messe beym Stande C erstlich den Verticalwinkel $KCI = \alpha$, und dann auch den Horizontalwinkel $ICD = \beta$ nach der gewöhnlichen Weise (§. 132.).

Hierauf auch bey D den Horizontalwinkel $IDC = \gamma$. So wird man daraus die Höhe KI auf folgende Art berechnen können.

In dem Dreyecke CID ist der Winkel $I = 180° - ICD - IDC = 180° - \beta - \gamma$ und folglich

$$\sin(180° - \beta - \gamma) : a = \sin\gamma : CI$$

$$\text{also } CI = \frac{a \sin\gamma}{\sin(180° - \beta - \gamma)}$$

Fer-

Ferner in dem rechtwinklichten Dreyecke KCI

$$1 : \text{tang}\,\alpha = CI : KI$$

daher $KI = CI \cdot \text{tang}\,\alpha = \frac{a \sin\gamma \,\text{tang}\,\alpha}{\sin(180° - \beta - \gamma)}$

oder durch Logarithmen, $\log KI =$

$$l\,a + l\sin\gamma + l\,\text{tang}\,\alpha - l\sin(180° - \beta - \gamma)$$

woraus man also die gesuchte Höhe KI findet.

Diese Methode ist bey Höhenmessungen der Berge vorzüglich zu empfehlen; theils wegen ihrer Bequemlichkeit, weil man die Standlinie nach Gefallen annehmen kan, theils auch in Absicht der Genauigkeit, weil man nicht so viel spitze Winkel zu befürchten hat, besonders wenn man die Standlinie ziemlich groß annimt. Bey den vorhergehenden Aufgaben, wo die Standlinie mit der auszumessenden Höhe in einer Ebene lag, wurde nicht allein die Aufgabe dadurch eingeschränkt, sondern man hat, weil alle Winkel in einer Verticalebene gemessen werden, auch meistens sehr spitze Winkel zu befürchten, besonders bey Messung der Höhen, aus ziemlich grossen Entfernungen.

Ich habe zwar gesagt, daß man die Standlinie CD so viel als möglich horizontal annehmen müsse. Dies geschah nur wegen der Bequemlichkeit. Es erhellet aber leicht, daß diese Bedingung nicht nothwendig ist. Gesetzt D läge um die

Höhe Dd höher als C, so braucht man in obiger Auflösung eigentlich nicht die wahre Entfernung CD, sondern die auf den Horizont reducirte Cd, welche man durch Hülfsmittel, die wir bereits im vorhergehenden beygebracht haben, gar leicht finden kan;

Und wenn D gleich höher liegt als C, so wird man, wenn nur bey D der Winkelmesser horizontal gestellt wird, doch den Horizontalwinkel IdC finden.

In den meisten Fällen wird man aber gar leicht die Standpunkte C, D, so wählen können, daß man ohne merklichen Irrthum, beyde in einer Horizontalfläche annehmen, und die wahre Weite CD, der horizontalen Cd gleich setzen kan.

Zum Ueberfluß könte man auch bey D, den Elevationswinkel KDI messen, und solchergestalt, aus den beyden Winkeln ICD, IDC, der Standlinie CD, und dem Winkel KDI, die Höhe KI noch einmahl finden, sie mit der, welche man aus den Winkeln ICD, IDC, KCI fände, vergleichen, aus beyden ein arithmetisches Mittel nehmen, und so die Höhe KI weit genauer finden, als es durch eine Messung allein geschehen würde.

Wegen Messung der Horizontalwinkel ICD, IDC ist es nothwendig, daß das Werkzeug mit einem

einem Fernrohre versehen werden kan, das in einer Verticalebene auf und nieder beweglich ist. Ist aber das Werkzeug nicht mit einer dergleichen Vorrichtung versehen, so ist man genöthigt, statt der erwähnten Horizontalwinkel, die schiefen Winkel KCD, KDC zu messen, indem man das ganze Werkzeug neiget. Man wird aber demohnerachtet die Höhe KI finden können, denn in dem Dreyecke KCD, ist alsdann der Winkel K = 180° — KCD — KDC mithin auch durch die Proportion sin K : CD = sin KDC : KC die Hypothenuse des rechtwinklichten Dreyecks KCI bekant, woraus man alsdann die Höhe KI durch die Formel KI = KC sin KCI findet.

Anmerkung.

§. 196. Die bisherigen Methoden, Höhen zu messen sind diejenigen, von denen man in der Ausübung den meisten und sichersten Gebrauch machen kan. Es giebt aber noch eine sehr große Anzahl von Vorschriften, Höhen zu messen, die aber theils sich nur auf besondere Fälle erstrecken, theils auch oft nicht die gehörige Genauigkeit verstatten. Dergleichen Aufgaben wären z. E. Die Höhe eines Berges zu finden, aus der Höhe eines auf ihm befindlichen Thurms, ferner aus den bekanten Seiten, eines in einem Thale befindlichen Dreyecks, die Höhe eines Berges zu

finden, wenn man sich auf der Höhe selbst befindet u. s. w. dergleichen Aufgaben lassen sich in grosser Menge erdenken. Bey einigen derselben, wird so gar erfordert die Winkel mit sehr grosser Schärfe zu messen, in welchem Falle man sich der Fernröhre mit Micrometern bedienen muß.

Winkel die man auf einem Thurme u. s. w. nähme, könte man sehr bequem durch Hülfe solcher Werkzeuge messen, die mit Spiegeln versehen wären (§. 122)

Es wird übrigens, einem Geometer keine sonderliche Schwierigkeit verursachen, dergleichen Aufgaben aufzulösen, wenn er nur eine genaue Kenntniß derjenigen Stücke einer Figur hat, die man unmittelbar messen muß, um das unbekante daraus herzuleiten.

Dies wird mich also berechtigen, wenn ich nur wenige Aufgaben von Höhenmessungen beygebracht habe. Wer aber mehrere Methoden kennen lernen will dem können folgende Schriftsteller Unterricht geben.

1) *Riccioli, Geographia reformata. Lib. 6.*

2) *Ben. Hedraei, nova et accurata Astrolabii geometrici structura.* (Lugd. Bat. 1643) Membr. II.

Ferner

Ferner eine Abhandlung von einem ungenanten *de methodis montium altitudines demetiendi etc.* (Vermuthlich ist der Verfasser Hr. Zeplichal der sich durch einige algebraische Schriften bekant gemacht hat.)

Ausser diesen trigonometrischen Methoden, hat man aber noch eine andere, physicalische, nemlich durch Hülfe eines Barometers, Höhen zu messen.

Es ist nemlich aus der Physic bekant, daß die Luft an Dichtigkeit und Elasticität beständig abnimt, auf je grössere Höhen man kömt. Da nun das Queckſilber im Barometer steigen muß, je grösser der Druck der Luft auf das Queckſilber ist, hingegen fallen muß, je geringer dieser Druck ist, so erhellet, daß auf Bergen das Queckſilber im Barometer niedriger stehen müsse als im Thale.

Die Naturlehrer haben sich nun von jeher immer damit beschäftigt, das Gesetz zu finden, nach welchem sich der Druck der Luft in verschiedenen Höhen über der Erdfläche richtet, und da die Queckſilberhöhe im Barometer mit dem Drucke der Luft bekantermaaßen das Gleichgewicht hält, so hat man gesucht ein Mittel zu finden, aus den gegebenen Barometerhöhen, sogleich die Höhe einer gewissen Station über einer andern zu entdecken.

Da es sich wohl der Mühe verlohnt, von einer so nützlichen und leichten Art, Höhen zu messen etwas beyzubringen, so soll folgendes dazu dienen.

Wie man aus der Höhe des Barometers an zwenen Orten, finden kan, um wie viel der eine höher liege als der andere.

§. 197. Um dieses zu leisten, so nehmen die Naturlehrer ein Gesetz an, welches wenigstens so weit statt findet, als man mit Barometern Versuche anstellen kan, nemlich daß die Dichte der Luft an jeder Stelle über der Erdfläche sich verhalte wie die Kraft mit der sie zusammengepresset wird.

Diese Voraussetzung hat sich durch würkliche Versuche, bey denen die Luft mit einer doppelten, dreyfachen Kraft, in die Hälfte, oder den dritten Theil, des vorigen Raumes zusammengepresset ward, bestätiget, und man kan füglich dieses Gesetz bis auf solche Höhen in unserer Atmosphäre annehmen, auf die sich die höchsten Berge erstrecken; denn auf den höchsten Bergen, die wir kennen, ist die Luft gewiß noch nicht um den dritten Theil so dünne als im Thale.

I. Man nehme also an, zwischen den parallelen am, bd, Fig. LIX, sey eine Luftsäule, von der Oberfläche der Erde bis ans äuserste Ende der Atmosphäre enthalten.

II.

II. Man stelle sich vor, die ganze Höhe am, sey in eine sehr große Anzahl kleiner Theile getheilet, die wie ac, cf, fh u. s. w. einander gleich sind; ce, fg, hi u s. w. seyen Horizontalebenen, so werden solche, die ganze Luftsäule abund, in lauter Schichten aceb, cfeg, u. s. w. theilen, die insgesamt von gleicher Grösse und Höhe sind.

III. Zugleich wird man ohne merklichen Fehler, wegen der geringen Höhe der Schichten, die Luft in jeder Schicht, als gleichförmig dicht annehmen können.

IV. Man setze also, es seyen

der Schichte acbe; cfeg, fhgi u. s. w.
Dichtigkeiten d d′ d″ u. s. w.
Gewichte p p′ p″ u. s. w.

Der Druck der gesamten Luftsäule, auf die untere Fläche ab heiße P, der Druck auf die Flächen ce, fg, hi, u. s. w. Q, R, S u. s. w. so erhält man folgendes.

V. Es ist $Q = P - p$ weil der Druck auf die Fläche ce um das Gewicht der Luft in der untern Schicht, kleiner ist, als der Druck auf die Ebene ab. Ferner, aus eben den Gründen

$R = P - p - p'$
$S = P - p - p' - p''$

u. s. w.

VI. Weil nun nach dem oben erwähnten Gesetze, die Dichtigkeiten der Schichte acbe, fege u. s. w. sich verhalten, wie die darauf drückenden Kräfte, so hat man

$$d : d' = Q : R = P - p : P - p - p'$$
$$d' : d'' = R : S = P - p - p' : P - p - p' - p''$$

u. s. w.

VII. Weil aber die Schichte gleichen Raum haben, so verhalten sich ihre Gewichte, wie ihre Dichtigkeiten, demnach ist auch

$$d : d' = p : p'$$
$$d' : d'' = p' : p''$$

u. s. w.

VIII. Demnach aus VI. VII. auch

$$p : p' = P - p : P - p - p'$$
$$p' : p'' = P - p - p' : P - p - p' - p''$$
$$p'' : p''' = P - p - p' - p'' : P - p - p' - p'' - p'''$$

u. s. w.

Mithin, durch die bekante Verwandlung der Proportionen (antecedentes et Consequentes summando)

$$P : P - p = P - p : P - p - p'$$
$$P - p : P - p - p' = P - p - p' : P - p - p' - p''$$

u. s. w.

Oder

Oder aus (V) statt $P - p$, $P - p - p'$ u. s. w. die Buchstaben Q, R u. s. w. substituirt

$$P : Q = Q : R \text{ also } R = \frac{Q^2}{P} = P \cdot \frac{Q^2}{P^2}$$

$$Q : R = R : S \text{ also } S = \frac{R^2}{Q} = P \cdot \frac{Q^3}{P^3}$$

u. s. w.

Hieraus erhellet also, daß die Pressungen der Luft auf die Flächen, oder Schichten, ab, ce, fg u. s. w. in einer geometrischen Progression fortgehen, wie folget.

$$P;\ Q;\ R;\ S \text{ u. s. w. oder}$$

$$P;\ P \cdot \frac{Q}{P};\ P \cdot \frac{Q^2}{R^2};\ P \cdot \frac{Q^3}{P^3} \text{ u. s. w.}$$

Der Exponente dieser geometrischen Progression ist $= \frac{Q}{P}$.

IX. Man setze also vw sey die mte Schicht über ab und xy die nte; man nenne den Druck der Luft auf $vw = X$, auf $xy = Y$ so ist vermöge der erwähnten geometrischen Progression,

$$X = P\left(\frac{Q}{P}\right)^m ;\ Y = P \cdot \left(\frac{Q}{P}\right)^n$$

Mithin $\frac{X}{P} = (\frac{Q}{P})^m$; $\frac{Y}{P} = (\frac{Q}{P})^n$ oder wenn man auf beyden Seiten Logarithmen nimmt.

$$\log \frac{X}{P} = m . \log \frac{Q}{P} ;$$

$$\log \frac{Y}{P} = n \log \frac{Q}{P}$$

folglich $\log \frac{X}{P} : \log \frac{Y}{P} = m : n$

X. Nun verhalten sich aber m; n, wie die Mengen der gleichen Theile, die auf av, ax, gehen; d. h. n, m verhalten sich wie die Höhen ax, av, der beyden Schichte xy, vw, über der unteren ab. Ferner, die Pressungen P, X, Y der Atmosphäre auf die Schichten ab, vw, xy, verhalten sich wie die Queckſilbersäulen, die die Luft, bey a, v, x im Barometer erhalten kan. Nennet man also die Höhe av = h; ax = H, die Barometerhöhe bey a = B
bey v = b
bey x = β
so verwandelt sich die obige Proportion IX in nachstehende

$$h : H = \log \frac{b}{B} : \log \frac{\beta}{B}$$

oder

oder welches auf eines hinausläuft

$$h : H = \log \frac{B}{b} : \log \frac{B}{\beta}$$

Es verhalten sich also die Höhen der Stationen v, x, über der Horizontalfläche ab, wie die Logarithmen der Quotienten, wenn man die Barometerhöhe in der untersten Station a, mit den Barometerhöhen bey den Stationen v, x, dividiret.

Anwendung dieses Satzes auf Messung der Höhen.

XI. Es ist also klar, daß, wenn man bey einem gewissen Barometerstande B der untersten Station a, ein für allemahl durch eine Erfahrung ausgemacht hat, wie hoch man sich erheben muß, daß das Barometer um eine gewisse bestimte Größe sinket, man alsdann für jede gegebene Barometerhöhe an einer andern Station, finden könne, wie hoch diese Station, über der untersten liegt.

Ex. Die Erfahrung hat gelehret, daß wenn in der untersten Station a, die Barometerhöhe B = 29 pariser Zoll = 29 . 12 = 348 Linien ist, und man sich um die Höhe av = h = 12,497 Toisen, über der untersten Station erhebt, alsdann bey v die Barometerhöhe um

1 Linie

1 Linie geringer ist als bey a, daß folglich bey v die Barometerhöhe nur 347 Linien seyn werde.

Man setze also in obige Proportion statt, B, h, b, die gefundenen Werthe, so verwandelt sich diese Proportion in folgende

$$12{,}497 : H = \log \frac{348}{347} : \log \frac{348}{\beta}$$

Nun ist aber aus den Logarithmen Tafeln

$$\log \frac{348}{347} = \log 348 - \log 347 = 0{,}0012497$$

Mithin

$$12{,}497 : H = 0{,}0012497 : \log \frac{348}{\beta}$$

welches also folgende Gleichung giebt

$$H = \frac{12{,}497}{0{,}0012497} \cdot \log \frac{348}{\beta} \text{ oder}$$

$$H = 10000 \log \frac{348}{\beta} = 10000(\log 348 - \log \beta)$$

Auf diese Art erhellet also daß man die Höhe H einer Station x, bey der die Barometerhöhe = β Linien ist, über einer andern, wo die Barometerhöhe 348 Linien beträgt, finden werde, wenn man vom Logarithmen der Zahl 348, abziehet den Logarithmen der Zahl β, und den Rest mit 10000 mul-

multipliciret. Die Höhe der obern Station über der untern findet man aber durch dieses Verfahren in Toisen; und die Barometerhöhen müssen in pariser Linien ausgedrückt werden weil diese Maaße bey obigem Versuche zum Grunde liegen.

XII. Es heisse nun an einer andern Station r, die Barometerhöhe = b, und die Erhöhung dieser Station über der, wo die Barometerhöhe 348 Linien ist, = h, so ist auf eben die Art

$$h = 10000 \log \frac{348}{b}$$

XIII. Aus XI. XII. ist also

$$H - h = 10000 \left(\log \frac{348}{\beta} - \log \frac{348}{b}\right) \text{ oder}$$

$$H - h = 10000 \log \frac{b}{\beta}.$$

Hier drückt also der Unterschied H — h, die Höhe rx einer Station x, wo die Barometerhöhe ß Linien beträgt, über einer andern r, wo die Barometerhöhe b Linien groß ist, aus; und daher hat man allgemein folgende

Regel

Regel.

Man suche die Differenz der Logarithmen der Barometerhöhen an zwoen Stationen, multiplicire sie mit der Zahl 10000, so hat man die Höhe der einen Station über der andern in Toisen.

XIV. So erhellet also, wie die Barometerhöhen an jeder Stelle der Atmosphäre, auf eine sehr leichte Art, zu Ausmessung der Höhen, in der practischen Geometrie gebraucht werden können, und ich will nun die erwähnte sehr bequeme Regel, mit einem Beyspiel erläutern.

Gesetzt am Fuße eines Berges fände man die Barometerhöhe b = 27 Zoll 8 Linien = 332 Linien, auf der Spitze des Berges aber die Barometerhöhe = 26 Zoll 4 Linien = 316 Linien = β, so ist

log 332 = 2,5211381
log 316 = 2,4996871

Unterschied = 0,0214510

mult. mit 10000 giebt 214,51 Toisen. So hoch wäre die Spitze des Berges über den Fuß desselben erhaben. Auf die Decimalbrüche der Toisen, würde man sich aber wohl schwerlich verlassen können, weil in der Beobachtung der Barometerhöhen doch immer kleine Fehler vorfallen.

Man

Man kan also in der Höhe des Berges nur die ganzen Toisen beybehalten.

Anmerkungen über dieses Verfahren und nöthige Vorsichten in der Ausübung.

§. 198. I. Die bisherige Methode, Höhen durchs Barometer zu messen, würde in jedem Falle ganz genau die Höhe einer Station über der andern geben wenn das oben § 196 angenommene Gesetz, seine völlige Richtigkeit hätte, und nicht noch andere Umstände wären, die auf dasselbe einigen Einfluß hätten. In der That hat auch die Erfahrung gelehret, daß die durchs Barometer bestimten Höhen nicht vollkommen, mit der trigonometrischen Messung derselben übereinstimmen. Bouguer glaubt durch seine Erfahrungen gefunden zu haben, daß man, um die wahre Höhe zu finden, von derjenigen welche durchs Barometer gefunden wird, den 30ten Theil abziehen müsse, oder daß man die durchs Barometer gefundene Höhe mit $\frac{29}{30}$ multipliciren müsse, um die wahre Höhe zu finden. Ich will indessen die vornehmsten Umstände die auf obenerwähntes Gesetz, Einfluß haben, hier auch kürzlich beybringen.

1) Ist klar, daß die Schlüsse des 197 §, woraus die Formel (§. 197 X) hergeleitet wurde voraussetzen, daß das Queckſilber im Barometer nur deswegen ſinke, wenn man höher steigt,

weil

weil der Druck der Luft auf das Queckſilber, in gröſſerer Höhe abnimt, und es erhellet leicht, daß obige Schlüſſe einige Veränderung leiden würden, wenn in der untern Station a, ſich der Druck der Atmoſphäre P, oder die Barometerhöhe ſelbſt, veränderte, während man aus der untern Station in die höhere ſteigt.

Hätte nämlich, indem man ſich in eine höhere Station begiebt, unterdeſſen der Druck der Luft durchaus ſich verändert, dergeſtalt, daß ein anderes Barometer, das man in der untern Station zurückgelaſſen hätte, ſelbſt auch geſtiegen oder geſunken wäre, ſo iſt es nicht erlaubt, das Sinken des Barometers, welches man mit ſich aus dem Thale in die Höhe nimt, bloß dieſer Höhe zuzuſchreiben, ſondern wenn die Regel (§. 197. XII) ihre Richtigkeit haben ſoll, ſo muß die Barometerhöhe, oder der Zuſtand der Luft in der untern Station ſich nicht verändern, während man aus dem Thale in die Höhe ſteigt.

Um alſo recht ſicher zu verfahren, ſo würde man einen Beobachter mit einem andern Barometer in der untern Station zurücklaſſen, und ihn zu verſchiedenen Zeiten, den Stand des Barometers obſerviren laſſen, während man in der obern Station den Barometerſtand beobachtete. Es verſtehet ſich, daß die beyden Barometer, deren man ſich bey dieſem Verfahren bedienet

dienet mit einander übereinstimmen, d. h. in der untern Station, einerley Höhe des Queckſilbers anzeigen müſſen. Man muß alſo beyde vorher ſorgfältig mit einander vergleichen, und wenn ſie nicht vollkommen übereinſtimmen, den Unterſchied anmerken.

Aus dieſen zu unterſchiedenen Zeiten, in der untern Station beobachteten Barometerhöhen, wird ſich nun gar leicht zeigen, ob ſich, während man in der obern Station die Barometerhöhe beobachtete, der Zuſtand der Luft durchaus verändert hat oder nicht. Sind nun die Zeiten angegeben, in welchen man die Barometerhöhen, an beyden Stationen beobachtete, ſo wird ſich daraus ohne großen Irrthum berechnen laſſen, wie hoch in dem Augenblicke, da man in der obern Station, den Barometerſtand beobachtete, das Barometer in der untern Station geſtanden haben müſte.

Geſetzt Morgens um 8 Uhr habe man in der untern Station beyde Barometer mit einander verglichen, ſie vollkommen übereinſtimmend, und ihre Höhe = 27 Zoll 4 Linien gefunden. Um drey Uhr nachmittags habe der Beobachter in der untern Station, die Barometerhöhe = 27 Zoll 8 Linien beobachtet. Ich will nun annehmen der Beobachter auf der höhern Station, habe Nachmittags um 1 Uhr den Barometerſtand beobachtet, und ihn = 26 Zoll $2\frac{1}{3}$ Linie gefunden.

So wird man, weil sich von 8 bis 3 Uhr in der untern Station die Barometerhöhe um 4 Linien, folglich, während daß man in die höhere Station stieg, sich der ganze Zustand der Luft verändert hat, gar leicht berechnen können, wie hoch um 1 Uhr Nachmittags, da oben die Barometerhöhe beobachtet wurde, das untere Barometer gestanden haben müste. Man schliesse nemlich nach der Regel de Tri, wie sich verhält die Zeit von 8 Uhr Morgens bis 3 Uhr Nachmittags, zur Zeit von 8 Uhr Morgens bis 1 Uhr Nachmittags, so verhält sich der Unterschied der Barometerhöhen, die in der untern Station um 8 Uhr und 3 Uhr beobachtet worden, zum Unterschiede dieser Barometerhöhen, von 8 Uhr bis 1 Uhr. also

7 Stund. : 5 Stunden = 4 Linien : $2\frac{6}{7}$ Linien.

Da also um 3 Uhr das untere Barometer um 4 Linien höher stand, als um 8 Uhr, so würde es um 1 Uhr nur $2\frac{6}{7}$ Linien höher gestanden haben, als um 8 Uhr. Es würde also um 1 Uhr N. die Barometerhöhe = 27 Zoll 4 Linien + $2\frac{6}{7}$ L. = 27 Zoll 6 $\frac{6}{7}$ Linien gewesen seyn, in dem Augenblicke da man in der obern Station die Barometerhöhe = 26 Zoll $2\frac{1}{3}$ L. fand

Diese beyden Barometerhöhen 27 Zoll $6\frac{6}{7}$ L. und 26 Zoll $2\frac{1}{3}$ Linien, muß man nun gebrauchen, die Höhe der obern Station über der untern zu finden.

2) Muß man überlegen, daß die verschiedene Wärme sowohl in der obern als untern Atmosphä-

re,

re, den Zustand der Luft, und deren Druck auf das Queckſilber, mithin auch das oben §. 197 angeführte Geſetz, woraus ſwir unſere Formel hergeleitet haben, gar ſehr verändert. Die Geſetze nun nach denen die Elaſticität, mithin der Druck der Luft auf das Queckſilber durch die Wärme modificirt wird, ſind in der That ſehr vielen Schwierigkeiten unterworfen, und Hr. *de Luc* in ſeinem Werke *ſur les modifications de l'Atmoſphaere*, davon in Leipzig durch Hrn. D. Gehler eine Ueberſetzung geliefert worden, hat ſich ſehr viele Mühe gegeben, dieſe Geſetze ſo wohl durch Beobachtungen als Schlüſſe herauszubringen. Er hat auch würklich eine Regel gefunden, welche mit der Wahrheit näher übereinkömt, als die obige §. 197 XIII.

Ferner hat auch die Wärme, ſelbſt Einfluß auf das Queckſilber im Barometer, in ſo ferne ſie nemlich das Queckſilber ausdehnt, und alſo dadurch die Barometerhöhe verändert. In ſo ferne müſſen alſo auch, die in der obern und untern Station beobachteten Barometerſtände korrigiret werden.

Da man hier nicht verlangen kan, daß ich die Umſtände, wie Hr. de Luc auf ſeine verbeſſerte Regel gekommen iſt, aus einander ſetze, auch in Hrn. H. Käſtners Abh. vom Höhenmeſſen in deſſen Markſcheidekunſt alles hieher gehörige

sehr deutlich und gründlich ausgeführt ist, so werde ich mich begnügen Hr. de Lucs Vorschriften blos ohne Beweis herzusetzen, und also blos die Regel anzugeben, nach der die oben gefundene Regel §. 197 XIII, wegen des Einflusses der Wärme, sowohl auf die Ausdehnung der Queckfilbersäule, als auf den Druck der Luft, korrigirt werden müsse.

Hrn. de Lucs Regel.

II. 1. Es sey die in der obern Station beobachtete Barometerhöhe = β paris. Lin. und zu eben der Zeit die reaumürsche Thermometerhöhe über dem Eispunkt = t Grade.

2. Die in der untern Station beobachtete, und nach (I. 1) auf eben die Zeit (II. 1) reducirte Barometerhöhe = b paris. L.; Thermometerhöhe = T Grad über dem Eispunkt.

3. Man korrigire, wegen der Ausdehnung des Queckfilbers durch die Wärme, die Barometerhöhe der obern Station um so viel Linien als die Grösse, $\frac{\beta.(t-10)}{4320}$ und die Barometerhöhe der untern Station, um so viel Linien, als die Grösse $\frac{b(T-10)}{4320}$ angiebt, und nenne solchergestalt die korrigirten Barometerhöhen in beyden Stationen, nemlich

β —

$$\beta - \frac{\beta.(t-10)}{4320} = \beta'$$

$$b - \frac{b\,(T-10)}{4320} = b'$$

4. Für diese korrigirten Barometerhöhen, suche man nun nach der Formel (§. 197. XIII) die Höhe der obern Station, über der untern, so wird dieselbe $= 10000 \log \frac{b'}{\beta'}$.

5. Man ziehe nun von $16\frac{3}{4}$ reaumürschen Graden über dem Gefrierpunkt, die halbe Summe der in beyden Stationen beobachteten Thermometerhöhen ab, und nenne den Rest C so ist

$$C = 16\frac{3}{4} - \left(\frac{T+t}{2}\right).$$

6. Man multiplicire endlich die nach (4) herausgekommene Höhe der einen Station über der andern, mit der Größe $1 - \frac{C}{215}$, so erhält man die wahre korrigirte Höhe der obern Station über der untern
Es wird also in Toisen, die

$$\text{korrig Höhe} = \left(1 - \frac{C}{215}\right) 10000 \log \frac{b'}{\beta'}$$

III. Um diese Berechnung in einem Beyspiele zu erläutern, so will ich setzen, in der untern Station stehe das Barometer auf 27 Zoll $4\frac{1}{2}$ Lin. $=$ b $=$ 328,5 Lin. das Thermometer auf 18 Grad $=$ T. In der obern Station das Barometer auf 26 Zoll $2\frac{3}{4}$ Lin. $=$ β $=$ 314,7 Lin. das Thermometer auf 7 Grad $=$ t, so wird

$$\frac{\beta\ (t-10)}{4320} = -\frac{3 \cdot 314,7}{4320} = -0,2 \text{ Lin.}$$

$$\frac{b.(T-10)}{4320} = +\frac{8 \cdot 328,5}{4320} = +0,6 \text{ Lin.}$$

Mithin die korrigirten Barometerhöhen

$\beta' = 314,7 + 0,2 = 314,9$ Linien

$b' = 328,5 - 0,6 = 327,9$ Lin.

Ferner wird $C = 16\frac{3}{4} - \left(\frac{18+7}{2}\right) = 16,75 - 12,5$

$= 4,25$ und $\frac{C}{215} = \frac{4,25}{215} = 4,25 \cdot 0,0046$

$= 0,019$ daher $1 - \frac{C}{215} = 1 - 0,019 =$

0,981 also die

korrig. Höhe $= 0,981 \cdot 10000 \log \frac{327,9}{314,9}$

$= 0,981 \cdot 10000 \cdot 0,0175687$

$= 172,34$ . . Toisen

$= 1034,04$ pariser Fuß.

Man

Man darf wohl nicht denken daß die Zehentheile eines Fußes in dieser Rechnung zuverläßig seyn werden, da kleine Fehler in den Beobachtungen die Höhe wohl selbst auf einige Fuße unsicher geben mögen.

IV. In diesem Exempel waren an beyden Stationen die Thermometerhöhen über dem Gefrierpunkt, folglich die Werthe von T, t, positiv. Für Thermometerhöhen unter dem Gefrierpunkt, muß man die Werthe von T, t, als negativ betrachten, und solchergestalt, so wohl bey Berechnung der korrigirten Barometerhöhen als auch des Werthes von C, sich hiernach richten.

V. Hr. de Luc hat auf diese Art, sehr viele Höhen durchs Barometer gemessen, sie mit der geometrischen Messung verglichen, und meistens nur einen sehr geringen Unterschied gefunden, wie man aus dem IVten Theile seines Werkes §. 624 u. f. ersehen kan.

Herr de Lüc, bedienet sich aber, um desto sicherer zu verfahren, an jeder Station, zweyer Thermometer, von deren Einrichtung man die Gründe sowohl in seinem oberwähnten Werke, als auch in Hrn. Hofr. Kästners Abh. vom Höhenmessen in dessen Markscheidekunst, findet.

Das erste Thermometer befindet sich unmittelbar an dem Brette, an welchem das Barometer hängt; dem Barometer kan also nichts wiederfahren, was dem Thermometer nicht auch wiederfühte, und so dienet dieses Thermometer, die Veränderungen und Korrectionen zu bestimmen, denen wegen der Ausdehnung des Quecksilbers durch die Wärme, die Barometerhöhen unterworfen sind, die Grade dieses Thermometers, werden also bey Berechnung der Werthe b', B' gebraucht.

Das andere Thermometer, dienet die Temperatur der Luftsäule zu bestimmen, in der die Barometerhöhe beobachtet wird, und die Grade desselben werden bey der Berechnung des Werthes von C zum Grunde gelegt.

Da es aber wohl nicht eines jeden Sache ist, die Scalen für diese Thermometer gehörig nach Hrn. de Luc's Vorschrift einzutheilen, und es übrigens auch keinen großen Fehler verursacht, wenn man sich bey jeder Station nur eines einzigen Thermometers (welches aber neben dem Barometer, in freyer Luft und an einem schattigten Orte hängen muß) bedienet, so habe ich Hrn. de Luc's Vorschriften auf den Gebrauch des reaumürschen Queckſilberthermometers, das zwischen dem Eis und Siedepunkt 80 Grade hält, eingerichtet, weil dieses Thermome-

mometer sehr bekant ist, und zu gegenwärtiger Absicht einige Bequemlichkeiten hat.

Gebrauchte man ein Farenheitisches Therm. so müste man die beobachteten Grade desselben, über oder unter dem Gefrierpunkt, auf reaumürsche Grade reduciren, welches sehr leicht geschehen kan, weil $2\frac{1}{2}$ farenh. Grade einen reaumürschen betragen.

VI. Die übrigen Vorsichten, und Bemerkungen, bey dem bisherigen Gebrauche der Barometer, sind nun kürzlich noch folgende.

1) Es müssen sowohl Barometer als Thermometer in Absicht ihrer Eintheilungen die nöthige Genauigkeit haben. Das Queckſilber, muß, ehe man damit sowohl Barometer als Thermometer füllet, vorher wohl gereiniget, und durchs Feuer von Luft befreiet werden.

2) Gewöhnlich sind die Barometer so beschaffen, daß das offene Ende der hohen Glasröhre, unten in einem weitern Gefäße stehet, dergestalt, daß sich beym Fallen des Barometers, das Queckſilber in dieses Gefäß begiebt. Die wahre Barometerhöhe ist nun eigentlich die Weite von der Oberfläche des Queckſilbers im Gefäße, bis an das äuserste Ende des Queckſilbers in der Röhre. Nun ist klar daß wenn das Queckſilber in der engen Röhre sinket, die Oberfläche desselben in dem weitern Gefäße steigen,

hingegen fallen werde, wenn das Queckſilber in der Röhre ſteigt. Da man nun bey Meſſung der Höhen mit dem Barometer, die Höhe des Queckſilbers d. h. die Weite zwiſchen den Oberflächen des Queckſilbers im Gefäße und in der Röhre, ſehr genau wiſſen muß; ſo muß die eingetheilte Scale des Barometers noch etwa $\frac{1}{2}$ Zoll bis unter die Oberfläche des Queckſilbers im Gefäße, reichen, damit man den Stand dieſer Oberfläche an der Scale bemerken könne. Die Zolle an der Scale müſſen übrigens wenigſtens bis auf Linien genau getheilt ſeyn; die äuſerſten Zolle kan man noch genauer eintheilen, wenn man um kleinere Theile als Linien zu beſtimmen, ſich nicht auf das Augenmaaß verlaſſen will.

Man ſiehet aus dem bisherigen, daß diejenigen Barometer wo ſich das Queckſilber in eine hölzerne Kapſel ſenket, die unten die Barometerröhre ganz umſchlieſſet, zu Höhenmeſſungen nichts taugen, weil man die Oberfläche des Queckſilbers in dieſer hölzernen Büchſe nicht ſehen, und ihren Stand an der Scale bemerken kan. Am beſten iſt es, wenn das Gefäß, in welchem die Glasröhre ſtehet, auch von Glas, und mit einer kleinen Oefnung in die die Luft dringen kan, verſehen iſt. Noch vorzüglicher und bequemer ſind aber diejenigen Barometer, welche wie Fig. LX ausweiſet, aus einer einzigen Glasröhre efhc beſtehen, die bey f wieder aufwärts, ſich in eine

weitere

weitere Röhre fbc krümmet. Diese weitere Röhre fbc vertritt die Stelle des gewöhnlichen Gefäßes, und wenn die Oberfläche e des Queckſilbers in der langen Röhre ſinket oder ſteigt, ſo ſteiget oder ſinkct umgekehrt, die Oberfläche bc des Queckſilbers in der weitern Röhre. Es verſtehet ſich, daß nun ſowohl an der engen als weiten Röhre, ſich eine Scale befinden müſſe, und man wird leicht begreifen, wie dieſe Scalen eingerichtet werden müſſen, damit man in jedem Falle, genau die ſenkrechte Entfernung, der beyden Oberflächen bc und e erhalte. Die lange Röhre iſt übrigens wie gewöhnlich bey l genau verſchloſſen, die kurze fbc aber, bey i mit einer kleinen Oefnung verſehen, damit die Luft auf die Oberfläche bc drücken könne.

Was übrigens für Vorſichten beym Füllen der Barometer und Therm. und ſonſt noch bey deren Verfertigung zu beobachten ſind, davon muß man in beſondern Schriften Nachricht ſuchen, von denen vorzüglich das oberwähnte Werk des Hrn. de Luc, ferner Michaeli du Creſt's kleine Schriften von Thermom. u. Barometern aus dem franz von J C Thenn (Augsp. 1770.) und Hrn Commiſſ. Strohmeyers Anleitung übereinſtimmende Thermometer zu verfertigen (Gött. 1775) u. ſ. w. zu empfehlen ſind.

Wie die Barometer besonders zu langen Bergreisen eingerichtet werden müssen, ertheilet ebenfalls Hr. de Luc den gehörigen Unterricht; auch Hrn. Branders Beschreibung zweyer besonderer und neuer Barometer, die zu Höhenmessungen vorzüglich zu gebrauchen sind, als ein Zusatz zu Hrn du Crest Saml. kleiner Schriften von Therm und Barometern (Augsp. 1772), ist zu dieser Absicht nützlich.

3) Bey Beobachtung der Barometerhöhen muß man ferner das Auge genau in der Fläche c oder bc halten, in der sich das Queckſilber endiget, damit man keine Parallaxe zu befürchten habe;

4) Die Barometer sowohl, als Thermometer, müssen so genau als möglich vertical hängen.

Diese und ähnliche Vorsichten, werden jedem Geometer leicht von selbst einfallen, und wer überhaupt von allem dem bisherigen, ausführlichern Unterricht verlangt, der lese vorzüglich Hrn. Hofrath Käſtners Abhandlung von Höhenmessungen durchs Barometer in dessen Marksheidekunst, in welcher nützlichen Schrift man noch andere Formeln und Regeln, Höhen durchs Barometer zu messen, ausgeführt findet. Meine Absicht verstattet nicht weitläuftiger zu seyn.

Noch

Noch einige Anmerkungen über die trigonometrische Messung der Höhen, sehr weit entlegener Gebirge.

§. 199. I. Wenn man die Höhe eines von den Standpunkten sehr weit entlegenen Berges, nach den vorhergehenden Methoden bestimmen will, so kan man fragen was die Krümmung der Erde auf diese Messungen für Einfluß habe.

Es sey also Fig. LXI, G der Mittelpunkt der Erdkugel, und CEB ein Stück eines grösten Kreises auf der Oberfläche der Erde.

A ein Objekt, z. E. die Spitze eines entfernten Berges, um die Höhe AB über der Erdfläche erhaben.

Weil AB eine Verticallinie seyn muß, so wird AB, verlängert, durch den Mittelpunkt der Erde gehen. (§. 4)

Gesetzt nun c sey ein Standpunkt, um die Höhe cC über der eigentlichen Erdfläche erhaben, so wird auch Cc die Verlängerung des Halbmessers GC seyn. Man gedenke sich durch c eine Horizontalebene cO, so wird dieselbe auf Gc senkrecht stehen. (§. 11)

Der Winkel Aco, sey bey c der Elevationswinkel des Objekts A, über der durch c gehenden Horizon-

rizontalfläche, oder Horizontallinie co; und ein Perpendickel Ao, auf die durch c gehende Horizontalfläche wird die Höhe des Objekts A, über den Horizont des Beobachters c ausdrücken.

co wird die Horizontalweite des Objekts A von c seyn.

Nun erhellet, daß die vorhergehenden trigonometrischen Methoden, eigentlich nur allemahl, die Höhe Ao, über dem Horizont des Standpunktes, bestimmen, keinesweges aber die wahre Höhe des Objekts über der Erdfläche bey B, oder die Höhe AB.

Wolte man also die trigonometrisch gefundene Ao, für die wahre Höhe AB annehmen so würde man einen Fehler begehen, der desto grösser ist, je weiter A von c liegt, je mehr also die Krümmung der Erdfläche, zwischen B und C beträgt.

Ich will nun zeigen, wie man aus der trigonometrisch gemessenen Höhe Ao, die wahre Höhe des Berges, AB, finden könne.

II. Es heiße also die Höhe Ao = c, der Elevationswinkel Aco = α, die Krümmung der Erde zwischen C und B oder der Bogen CB, als Maaß des Winkels G = β.

Der

Der Halbmesser der Erde GC = GB = r, des Standpunkts c Erhöhung über der wahren Erdfläche, oder Cc = b. Wäre der Standpunkt c z E. selbst auf einer Bergspitze, so bedeutete Cc die Höhe dieses Berges.

Nun ist wegen der ähnlichen Dreyecke Gce, Aeo, der Winkel eAo = G = β mithin für sin tot = 1

Ao : Ae = 1 : sec β oder
Ae = c . sec β.

Ferner in dem rechtwinklichten Dreyecke Gce

Gc : Ge = 1 : sec β also
Ge = (r + b) sec β.

daher Be = Ge — GB = (r + b) sec β — r
folglich Be + Ae oder AB = (r + b + c) sec β — r.

III. Man siehet also daß außer dem Halbmesser der Erde welcher 3272020 Toisen beträgt (§. 117 I Lehns.) auch die Größe des Bogens CEB = β bekant seyn müsse.

Diesen Bogen, welcher des Punkts B Weite von C ausdrückt (denn alle Weiten auf der Erdfläche, sind eigentlich Bogen gröster Kreise) muß man entweder aus geographischen Nachrichten als bekant annehmen, oder muß denselben selbst aus gemessenen Standlinien bestimmen.

Wenn

Wenn des Punkts A Weite von c, oder Ac bekant ist, welche man gar leicht aus angenommenen Standlinien bestimmen kan, so wird man dieselbe auch gebrauchen können, den Winkel G, oder den Bogen β zu bestimmen.

Ein gleiches würde man vermittelst der Horizontalweite co, der beyden Objekte A, c, bewerkstelligen können.

Wenn der Elevationswinkel Aco sehr klein ist, welches bey Höhenmessungen, aus sehr weit entlegenen Standpunkten immer statt findet, so kan man ohne merklichen Irrthum die aus Standlinien trigonometrisch gefundene Horizontalweite co, der wahren Weite cA gleichsetzen.

Ich kan also co = cA als eine bekante Größe annehmen, und will co = cA = a setzen.

IV. In dem Dreyecke GcA sind also die Größen Gc = r + b, cA = a, und der eingeschlossene Winkel GcA = 90° + α bekant. Daraus kan man also den Winkel G nach den bekanten Regeln ausfindig machen. Aber ohne den Winkel G zu suchen läst sich die Größe AB noch auf eine andere Art finden.

V. Man berechne aus denen in (IV) angenommenen bekanten Größen in den Dreyecke AcG, die Seite AG, ziehe davon ab GB = r, so hat man AB.

Wenn

Wenn man nach (Trig. S. XVIII) verfährt, und die dortigen a, b, hier cG, cA oder, r + b; a; bedeuten läst, und den dortigen Winkel $\varphi = 90° + \alpha$ setzt; so erhält man erstlich

$$\sin\psi = \frac{2\cos(45° + \frac{1}{2}\alpha)\sqrt{a(r+b)}}{a+r+b}$$ und dann

$$AG = (a+r+b)\cos\psi.$$

Ex. Aus Cassini Abhandl. von der Figur und Größe der Erdkugel, (aus dem franz. von Albr. Klimm).

Im X Kapitel dieses Buches giebt Hr. Cassini die trigonometrische Messung verschiedener Höhen des Pyränäischen Gebürges, und fand z. E. für den Kanigou, einen der höchsten des erwähnten Gebürges, den Elevationswinkel $Aco = \alpha = 2° 37'$, und die aus einer gewissen Standlinie gefundene Weite $Ac = a =$ 28767 Toisen. Der Standpunkt c war nahe an der Oberfläche des Meeres, so, daß cC oder b nur 9′ betrug, eine Größe die man ohne merklichen Fehler hier = o setzen kan. Dies giebt

also hier $\sin\psi = \frac{2\cos(45° + \frac{1}{2}\alpha)\sqrt{a \cdot r}}{a+r}$,

und $AG = (a+r)\cos\psi$

Mithin $\log 2 = 0{,}3010300$

$l \operatorname{cof}(45° + \frac{1}{2}\alpha) = 9{,}8393380$

$\frac{1}{2}(l\,a + l\,r) = 5{,}4808551$

$15{,}6272231$

$l(a+r) = 6{,}5186175$

$\log \operatorname{fin} \psi = 9{,}1086056$

$\psi = 7°.22'.40''$

$\log \operatorname{cof} \psi = 9{,}9963892$

$l(a+r) = 6{,}5186175$

$\log AG = 6{,}5150067$

daher AG = 3273457

abgezog. GB = 3272020

Höhe des Kanigou = 1437 Toiſ. = AB

Hr. Caſſini findet 1441 Toiſen, dis rühret aber daher, weil er den Halbmeſſer der Erde etwas anders annimmt, wie ich.

Um nun zu zeigen, was man für einen beträchtlichen Fehler begehet, wenn man Ao für AB annehmen wolte, ſo will ich in dem rechtwinklichten Dreyecke cÂo, auch noch Ao berechnen,

log

log Ac = l a = 4,4588949
log ſin Aco = 8,6594748

log Ao = 3,1183697
Ao = 1313 Toiſen.

Mithin AB — Ao = 1437 — 1313 = 124 Toiſen.

Man würde alſo einen Fehler von 124 Toiſen begehen.

Es erhellet alſo, daß man, wenn nicht die Krümmung der Erde in Betrachtung gezogen wird, ſehr großen Fehlern ausgeſetzt iſt, wenn man die Höhen ſehr weit von den Standpunkten entlegener Gebürge, nach der gewöhnlichen trigonometriſchen Weiſe, berechnen will.

VI. Wenn man ſich durch C eine Tangente, oder Horizontallinie C ε vorſtellet, die in die Verticallinie GBA bey ε einſchneidet, ſo iſt B ε, der verticale Abſtand dieſer Horizontallinie, von der Erdfläche bey B, oder B ε drückt aus, um wie viel der, um den Bogen BC von C entfernte Punkt B, unter der Horizontallinie durch C liegt, und daher nennet man B ε auch das Gefälle.

Dieſes Gefälle kömt nun ſowohl, bey Meſſung ſehr weit entlegener Gebürge, als auch beym Nivelliren vor, wo man beſonders im letzten Falle, ſehr nöthige Rückſicht auf dieſes Gefälle nehmen muß.

Man siehet übrigens gar leicht daß dieses Gefälle mit in obiger Formel (II) für die Höhe des entfernten Gebürges, enthalten ist.

Denn in dem rechtwinklichten Dreyecke GCε ist $G\varepsilon = r \sec \beta$ folglich $B\varepsilon = r \sec \beta - r$.

Nun war (II)

$$AB = (r + b + c) \sec \beta - r \text{ oder}$$
$$AB = r \sec \beta - r + (b + c) \sec \beta$$

also $AB = B\varepsilon + (b + c) \sec \beta$

woraus also erhellet, daß in Bestimmung der Höhe AB, in der That das Gefälle Bε mit enthalten ist.

VII. Um dieses Gefälle in jedem Falle sehr leicht berechnen zu können, so überlege man daß

auch $B\varepsilon = r (\sec \beta - 1) = r.(\frac{1}{\cos \beta} - 1)$

$= r(\frac{1 - \cos \beta}{\cos \beta})$ ist. Weil nun selten der Bogen CB auf der Erdfläche, viel über $\frac{1}{2}$ Grad betragen wird, mithin der Winkel β nur immer von geringer Größe ist, so kan man ohne merklichen Fehler $\cos \beta = 1 - \frac{1}{2}\beta^2$ (Trig. S. X) setzen; dies giebt also das Gefälle

$$B\varepsilon = \frac{\frac{1}{2} r . \beta^2}{1 - \frac{1}{2}\beta^2};$$

oder

oder ohne merklichen Irrthum

$$B\varepsilon = \tfrac{1}{2}\, r\, \beta^2$$

weil man das Glied $\frac{1}{2}\beta^2$ im Nenner des vorhergehenden Werthes, wegen seiner Unbeträchtlichkeit in Vergleichung der 1, weglassen kan.

Bey dieser Formel $B\varepsilon = \frac{1}{2} r \cdot \beta^2$ muß man nun überlegen daß die Größe β eigentlich das Maaß des Winkels G in Decimaltheilen des Sinus totus, der = 1 gesetzt worden, ausdrücke. Ist also der Winkel β in Sekunden gegeben, so muß man in unserer Formel statt β den Werth $\frac{\beta}{206264}$ setzen; dies giebt daher das Gefälle

$$B\varepsilon = \tfrac{1}{2} r \cdot \frac{\beta^2}{206264^2}.$$

Weil nun r = 3272020 Toiſ. = 19632120 pariſer Fuß iſt, ſo wird $\frac{1}{2} r \cdot \frac{\beta^2}{206264^2} =$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{19632120}{206264^2} \cdot \beta^2$; berechnet man nun die Größe $\frac{1}{2} \cdot \frac{19632120.}{206264^2}$ durch Logarithmen, ſo findet man dieſelbe = 0,0002307 daher iſt $B\varepsilon = 0{,}0002307 \cdot \beta^2$ welche Formel alſo das Gefälle in Pariſer Fußen giebt, wenn der Winkel β in Sekunden ausgedrückt wird

Ex. Es sey $\beta = 1' = 60''$ so ist

$B\varepsilon = 0{,}0002307 . 60^2 = 0{,}83$.. Par. Fus.

VIII. Es kan aber auch geschehen, daß die Entfernung BC nicht in Secunden, sondern in Längenmaaße gegeben würde. In diesem Falle muß man erst berechnen wie viel Sekunden der Bogen CB hält; und diese Anzahl von Sekunden alsdann statt β in obige Formel setzen.

Man kan aber noch kürzer auf folgende Art dazu gelangen. Gesetzt der Bogen CB, dessen Gefälle man berechnen soll, halte a Pariser Fuß.

Weil nun 1 Grad auf der Erde 57107,5 Toisen, oder 342645 Par. Fuß hält, so kommen

auf eine Minute $\frac{342645}{60}$ oder 5710,7 par. F.

Auf eine Sekunde 95,2 par. F. Um also die Anzahl von Sekunden $= x$ zu finden, die auf a Fuß gehen, so schliesse man nach der Regel de Tri

$$95{,}2 : a = 1'' : x'' \text{ ; also } x'' = \frac{a}{95{,}2}$$

Sekunden; diesen Werth setze man statt β in die obige Formel so wird

$$B\varepsilon = \frac{0{,}0002307}{(95{,}2)^2} \cdot a^2$$

oder $B\varepsilon = 0{,}00000002545 \cdot a^2$

IX. Diese beyden Formeln, die man in jedem Falle gar leicht durch Logarithmen berechnet, (wenn man nemlich zu den beständigen Logarithmen von 0,000000002545 und 0,000002307 die Logarithmen von a^2 oder β^2 addiret) werden nun zeigen, unter welchen Umständen, bey Ausmessung der Höhen, das Gefälle beträchtlich ist oder nicht. Vorzüglich sind diese Formeln, auch in der Lehre vom Nivelliren brauchbar.

Man hat übrigens auch Tafeln berechnet, aus denen man das einem gewissen β oder a, zugehörige Gefälle sogleich herausnehmen kan. Eine dergleichen Tafel für reinl. Maaß, findet sich in Picards Abhandl. vom Wasserwägen, mit Hrn. Lamberts Beyträgen ꝛc. Eine andere für franz. Maaß in Caßinis oberwähnten Buche. Da aber diese Tafeln nicht für jeden Werth von β oder a, das Gefälle enthalten, und man für solche β, oder a, die nicht in diesen Tafeln genau zu finden sind, auf eine etwas mühsame Art durch Proportionaltheile, das Gefälle suchen muß, so kan man sich statt dieser Tafeln weit bequemer der gegebenen Formeln bedienen, besonders wenn man die Rechnung durch Logarithmen führet.

Korrection der trigonometrisch gemessenen Höhen, wegen der Brechung der Lichtstrahlen.

§. 200. I. Es ist aus der Erfahrung bekant, daß, wenn ein Lichtstrahl aus der Luft, in

Wasser, Glaß, oder sonst in eine durchsichtige dichtere Materie, fährt, derselbe von seiner gewöhnlichen geraden Richtung, nach der er fortgehen würde, abgelenket wird, so bald er die Oberfläche des Wassers oder Glases berührt. Die Erfahrungen wodurch dieser Satz bestätigt wird, finden sich in allen dioptrischen Anfangsgründen (z. E. gleich im ersten Artickel der Kästn. Dioptrick in dessen angewandten Math.)

Dieser Satz will so viel sagen, wenn AB Fig. LXII z. E. die Oberfläche eines mit Wasser angefüllten Gefäßes, oder eines gläsernen Würfels ABEF vorstellet, so wird ein Lichtstrahl cd, der auf dieselbe bey d auffällt, nicht den geraden Weg cde, fortsetzen, sondern bey d, durch das Wasser oder Glaß, nach einer ganz anderen Richtung df fortgehen, dergestalt, daß die neue Richtung df, mit der cde, einen gewissen Winkel edf macht.

Diese Aenderung des natürlichen Weges der Lichtstrahlen geschiehet allemal, so oft ein Lichtstrahl aus einer dünnern durchsichtigen Materie, in eine dichtere fährt; eben dieses würde auch einem Lichtstrahle wiederfahren, der z. E. aus einer dünnern Luft in eine dichtere führe.

II. Man setze durch d auf die brechende Fläche AB ein Perpendickel mn, so lehret ferner die Erfahrung daß 1) der gebrochene Strahl df, das

das Perpendikel mn, und der einfallende Strahl cd, in einer einzigen Ebene liegen, 2) daß der gebrochene Strahl df mit dem Perpendikel mn einen kleinern Winkel fdn machet, als der einfallende Strahl cde, daß also der einfallende Strahl gegen das Perpendikel gebrochen oder gelenket wird 3) daß der Winkel mdc oder edn, welchen der einfallende Strahl, mit dem Perpendikel mn machet, gegen den Winkel fdn, den der gebrochene Strahl df mit dem Perpendikel mn machet, ein bestimtes Verhältniß hat, welches von den Dichtigkeiten der beyden durchsichtigen Materien abhängt, in denen sich der Lichtstrahl cdf fortbewegt. So z. E. wenn der Lichtstrahl cd, aus Luft in Wasser fährt, so verhält sich ohne merklichen Fehler, der Sinus des Winkels mdc, zum Sinus des Winkels fdn = 4 : 3, oder wie 3 : 2 wenn der Strahl aus Luft in Glas fährt.

Sind die Winkel mdc, fdn, klein, so ist das Verhältniß der Sinusse ohne großen Fehler dem Verhältniß der Winkel gleich, dann verhalten sich also die Winkel mdc, fdn, selbst wie die Zahlen 4 : 3 oder 3 : 2.

III. Der Winkel fdn heist der gebrochene Winkel, und edn, oder mdc der Neigungswinkel; der Unterschied dieser beyden Winkel, oder der edf heist aber der Refractionswinkel.

IV. Eine Folge aus dem bisherigen ist nun diese:

Wenn der Lichtstrahl cd von einem gewissen Objekte c herkäme, und sich bey f ein Auge innerhalb der dichtern Materie befände, so würde dieses Auge das Objekt c nicht an seiner rechten Stelle c sehen, sondern weil es vom Objekte c, den Lichtstrahl nach der Richtung df bekömt, so würde es das Objeckt c, in der Verlängerung von fd zu sehen glauben, und es z. E. bey γ hinsetzen, so wie es hingegen, wenn die dichtere Masse ABEF nicht da wäre, das Objekt c nach der geraden Richtung fc sehen würde.

Eben dieser Umstand findet nun in der That auch bey unserer Atmosphäre statt. Man stelle sich statt c die Spitze eines entlegenen Berges vor, das Auge f aber irgendwo im Thale. Weil nun auf den Bergen die Luft immer dünner ist als im Thale, so erhellet daß das Auge f, den Lichtstrahl, der von der Spitze des Berges herabfährt, nicht unmittelbar nach einer geraden Richtung fc bekömt, sondern nach einer ganz andern fdγ, welche mit der wahren fc einen gewissen Winkel γfc machen wird; diese Ablenkung von dem wahren natürlichen Wege fc rühret nun bloß daher, weil der Lichtstrahl aus einer dünnern Luft, in die untere dichtere Atmosphäre fällt, und daher also eine gewisse Brechung leidet,

welche

welche von dem Verhältniß der verschiedenen Dichtigkeit der Luft abhängt.

V. Man gedenke sich nun durchs Auge f eine Horizontallinie fo, so ist der Winkel, welchen cf mit fo macht, der **wahre Elevationswinkel** der Bergspitze, am Auge des Beobachters f, und über der durch f gehenden Horizontallinie.

VI. Weil aber der Beobachter f, das Objekt c nicht in der wahren Richtung cf, sondern nach einer ganz andern γf siehet, so wird derselbe bey Messung des Elevationswinkels, eigentlich nicht den wahren cfo, sondern den **scheinbaren Elevationswinkel** γfo erhalten, mithin wenn er in der trigonometrischen Berechnung der Höhe co den scheinbaren Elevationswinkel γfo statt des wahren cfo braucht, so wird nicht die wahre Höhe des Berges co, sondern die scheinbare γo herauskommen; er wird also einen Fehler = γc begehen, der desto beträchtlicher seyn wird, je mehr der scheinbare Winkel γfo, von dem wahren cfo unterschieden ist.

Dies zeigt, daß, wenn man in Messung der Höhen entlegener Objekte, keinen Fehler begehen will, man vorher den scheinbaren gemessenen Elevationswinkel, in den wahren verwandeln müsse, welches geschehen würde, wenn man von dem Winkel γfo, den γfc, welchen man die Refraction nennet, abzöge.

Allein wie findet man in jedem Falle die Größe dieser Refraction γ f c, mithin die nöthige Korrection des beobachteten Elevationswinkels? Ich werde sogleich zeigen, wie man dieselbe jedesmahl bestimmet. Ich muß aber vorher noch folgende Erläuterungen zum vorausschicken.

VII. Eigentlich ist der Weg eines Lichtstrahls durch unsere Luft, eine krumme Linie; denn weil die Dichtigkeit der Luft von oben herab beständig grösser wird, so ist klar, daß ein Lichtstrahl, der von der Spitze eines entlegenen Berges herabfährt, immer in dichtere und dichtere Luftschichten kömt, mithin immer mehr und mehr von seinem Wege abgelenkt wird, und alle diese einzelne Brechungen des Lichtstrahls in jeder Luftschicht, werden verursachen, daß der ganze Weg desselben eine gewisse zusammenhängende krumme Linie bilden wird. Den ausgeführtern Beweiß hievon lese man in Hrn. Hofr. Kästners Astron. §. 136 in dessen Angew. Mathem.

Die wahre Gestalt dieser krummen Linie ausfindig zu machen, haben sich von jeher die Naturforscher beschäftigt; sie hängt offenbar von dem Gesetze ab, nach welchem sich die Dichtigkeit der Luft von der Erdfläche bis auf eine gewisse Höhe verändert. — Da aber dieses Gesetz noch nicht vollkommen bekant ist, so weiß man auch noch nicht völlig genau die wahre Gestalt dieser krummen Linie.

VIII. Indessen läst sich darthun, daß 1) diese krumme Linie in einer Verticalebene liegt die durchs Auge, und durchs Object gehet, 2) daß diese krumme Linie, gegen die Erdfläche zu, hohl ist, und 3) daß sie wenigstens nicht sehr merklich, von einem Kreisbogen abweichet, dessen Halbmesser ohngefähr 7 bis 8 mahl grösser ist als der Halbmesser der Erde. Den Beweiß hievon findet man in Hrn. Lamberts Eigenschaften der Bahn des Lichts (Berl. 1772) in III Abschnitt.

Es sey also Fig. LXIII fn ein Stück eines grösten Kreises auf der Erdfläche, C der Mittelpunkt desselben; also fC der Halbmesser der Erde.

Bey t ein Beobachter auf der Oberfläche der Erde, c ein Objekt um die Höhe cn über der Erdfläche erhaben.

Man beschreibe nun in der Ebene fCe mit einem Halbmesser fL, der ohngefähr 7 bis 8 mahl grösser ist als fC, einen Kreisbogen fec, durch die beyden Punkte t, c, so daß dieser Kreisbogen gegen die Erdfläche fn hohl ist, so wird fec die Bahn oder krumme Linie seyn, in der sich das Licht von c bis f bewegt.

Man stelle sich bey f ein paar Tangenten fm, fγ, vor; fm für den Kreisbogen fn, und fγ für den Kreisbogen fec; so ist fm die Horizontallinie des Orts t.

Die

Die Tangente fγ, wird aber die Richtung vorstellen, welche ein unendlich kleines Stückgen fi des Bogens fec, bey f hat; da also der Lichtstrahl ceif bey f, unter der Richtung if das Auge rühret, so erhellet, weil fγ die Verlängerung von fi ist, daß ein Auge bey f, das Objekt c, nicht an seinem wahren Orte, sondern in der Richtung der Tangente fiγ, sehen wird;

Da also fγ die scheinbare Richtung, nach der das Objekt gesehen wird, und fc die wahre Richtung ist, so ist eben so wie vorhin, cfm der wahre Elevationswinkel, γfm aber der scheinbare, der also um die Refraction γfc grösser ist, als der wahre.

Man siehet also, daß wegen der krummen Linie, in der sich das Licht durch die Luft beweget, das Objekt c immer höher zu liegen scheinet, als es in der That lieget, daß man also statt der wahren Höhe nc, die scheinbare nγ bekommen würde, wenn man nicht den gemessenen Elevationswinkel mfγ durch die Refraction cfγ corrigirte.

VIII. Um nun die Refraction in jedem Falle zu erhalten, überlege man folgendes.

Weil der Winkel fCn immer nur sehr klein ist, und z. E. wenn n von f auch 7 bis 10 Meilen entfernt wäre, der Bogen fn oder der Winkel C kaum 40 bis 50 Minuten beträgt, so

kan

kan man, wie eine kleine Ueberlegung zeigen wird, ohne merklichen Irrthum die Weite fc, der beyden Objekte, f, c, der Länge des Bogens fn gleich setzen.

Aber fc ist die Chorde des Bogens fec, und da ebenfalls der Bogen fec nur eine geringe Anzahl von Minuten halten wird, so wird auch ohne merklichen Fehler, die Länge des Bogens fec der Chorde fc gleich seyn. Folglich wird auch ohne beträchtlichen Irrthum der Bogen fec mit dem Bogen fn gleiche Länge haben.

Nun ist aber aus der Geometrie bekannt, daß, wenn zween Kreisbogen, die mit verschiedenen Halbmessern beschrieben worden, gleiche Länge haben, sich die Mengen von Minuten die auf jeden Bogen gehen, umgekehrt, wie der beyden Bogen Halbmesser verhalten.

Man nenne also die Menge von Minuten oder Secunden die der Bogen fn oder der Winkel C hält $= \beta$, die auf den Bogen fec gehen $= \alpha$, den Halbmesser fC $=$ r und den Halbmesser fL des Bogens fec $=$ R, so ist

$$\alpha : \beta = r : R .$$

aber $r : R = 1 : 8$ folglich auch

$$\alpha : \beta = 1 : 8$$

oder $\alpha = \frac{1}{8} \beta$.

d. h. der Bogen, der den Weg des Lichtes zwischen zweyen Objekten f, c, vorstellet, oder auch der diesem Bogen, an seinem Mittelpunkte zugehörige Winkel L, enthält nur den 8ten Theil der Anzahl von Minuten, welche auf den Winkel C, oder den Bogen fn gehen, der zwischen der Höhe cn, und dem Orte des Beobachters f, auf der Erdfläche enthalten ist.

Dieser merkwürdige Satz, dienet nun die Refraction γfc auf folgende Art zu finden.

Weil fγ eine Tangente des Bogens fec, fc aber eine Chorde desselben ist, so hat der Winkel γfc zu seinem Maaße den halben Bogen fec, wie gleichfalls aus der Geometrie bekant ist. Da nun fec $=$ α $=$ $\frac{1}{8}$ β ist, so wird seyn der Winkel γfc $=$ $\frac{1}{2}$ • $\frac{1}{8}$ β $=$ $\frac{1}{16}$ β.

Die Refraction beträgt also den 16ten Theil des Winkels fCn, dessen Maaß der Bogen β oder fn ist.

X. Auf diese Art kan man also in jedem Falle sehr leicht die Größe der Refraction finden, wenn man weiß wie viel Minuten oder Sekunden, auf den Bogen fn gehen, der zwischen dem Beobachter f, und der auszumessenden Höhe cn enthalten ist.

Gesetzt der Bogen fn sey 30 Minuten, so ist die Refraction $\gamma f c = \frac{30}{100}$ Minuten $= 1'.52''$, wäre also der scheinbare gemessene Elevationswinkel $mf\gamma = 1°\ 15'$ so wäre der wahre Elevationswinkel $cfm = 1°15' - 1'52'' = 1°.13'.8''$.

XI. Die Anzahl von Minuten und Sekunden die aber in einem gegebenen Falle auf den Bogen fn gehen, kann man finden, wenn der Bogen fn in Längenmaaße bekant ist; da nun die Länge dieses Bogens ohne merklichen Fehler der Weite fc gleich ist, so ergiebt sich auch die Refraction, wenn man weiß, wie weit das Objekt c von dem Orte f wegliegt. Man sehe fc als einen Bogen auf der Erdfläche an, verwandle ihn in Minuten und Sekunden, u. nehme den 16ten Theil davon, so hat man die Refraction.

Man setze also die Weite fe, die aus der trigonometrischen Messung bekant ist $= a$, so ist auch $fn = a$ und daher in Sekunden der Winkel

$C = \frac{a}{r} . 206264$, wo r den Halbmesser der Erde bedeutet. Setzet man also $r = 3272020$ Toisen so ist die Refraction $= \frac{1}{16} C =$

$\frac{a . 206264}{16 . 3272020} = 0{,}003938 . a$ Sekunden; in welcher Formel a in Toisen gegeben seyn muß.

XII. Man siehet leicht, daß, wenn die auszumessende Höhe cn, von dem Standpunkt f nicht gar weit wegliegt, ohne merklichen Irrthum die Refraction für Null angesehen werden kan. Gesetzt der Bogen fn betrüge z. E. nur 3 Minuten, oder in Längenmaaße 17132 pariser Fuß, so wäre die Refraction nur $\frac{3}{10}$ einer Minute oder etwa 10″; man könte sie daher ohne beträchtlichen Irrthum weglassen; allein bey Messung der Höhen, aus sehr weit entfernten Standpunkten, darf man die Refr. nie aus der Acht lassen.

XIII. Die beygebrachte Regel, daß die Refraction den 16ten Theil des Winkels fCn beträgt, ist eigentlich auf die Voraussetzung gegründet, daß des Kreisbogens fec Halbmesser 8 mahl grösser ist, als des Kreisbogens fn Halbmesser. Weil aber die krumme Linie des Lichtstrahls von dem Zustande der Luft abhängt, mithin der Kreisbogen fec bald flächer bald erhabener seyn muß, je nachdem der Zustand der Luft durch Wärme oder Dünste u. d. g. verändert wird, so erhellet daß auch des Kreisbogens fec Halbmesser nicht immer vollkommen einerley Größe haben wird. Dies zeigt also daß auch die Refraction, nicht beständig $\frac{1}{16}$ des Winkels C, sondern bald etwas größer, bald etwas kleiner, seyn werde. Indessen wird aber doch die Refraction nie viel von $\frac{1}{16}$. C abweichen; wenn

sich auch der Zustand der Luft sehr merklich verändert.

Da der Zustand der Luft, von der Veränderung ihrer Dichtigkeit abhängt, und diese durch den Stand des Barometers und Thermometers angezeigt wird, so erhellet, daß die Refraction von dem Stande des Barometers und Thermometers bey f abhängen muß. Wenn ich überhaupt setze, daß die Refraction $\frac{1}{m}$ des Winkels C betrage, so habe ich nach einer von der Wahrheit nicht sehr entfernten Hypothese gefunden, daß, wenn in der untersten Station f das Barometer auf 28 Zoll stehet, die Werthe des Bruchs $\frac{1}{m}$ für verschiedene Grade des reaumürschen Thermometers folgende sind

Stand d. Therm.	der Werth von $\frac{1}{m}$
— 10°	$\frac{1}{15,6}$
0	$\frac{1}{16,4}$
+ 10	$\frac{1}{17,2}$
+ 20	$\frac{1}{18,1}$

Jeder Werth dieser Tafel muß aber nun noch in dem Verhältniß größer oder kleiner genommen werden, in welchem die Barometerhöhe bey f, größer oder kleiner ist als 28 Zoll.

Ex. Was für ein Theil des Winkels C wird die Refraction seyn, wenn beym Standpunkte f, das Thermometer 10 Grad über dem Gefrierpunkt, das Barometer aber auf 27,5 Zoll stände?

Weil für + 10° des Therm. der Werth von $\frac{1}{m} = \frac{1}{17,2}$ ist so schliese man

$$28 : 27,5 = \frac{1}{17,2} : x$$

so wird $x = \frac{1}{17,7}$ also wird bey einem solchen Zustande der Luft, die Refraction $\frac{1}{17,7}$. des Winkels C seyn.

XIV. Eigentlich hängt die Refraction auch etwas von dem Elevationswinkel γ f m ab, allein der Einfluß dieses Winkels auf die Refraction, ist fast in allen Fällen so unbeträchtlich, daß man ihn völlig außer Acht lassen kan.

XIV. Außer der in VIII erwähnten Schrift, können zu weiterer Nachlesung noch folgende Schriften dienen.

Memoires de l'Ac. de Paris. 1749. p. 101.

Meines Vaters *Tob. Mayeri Programma de refractionibus objectorum terrestrium* Goett. 1751.

XVII. Kapitel.

Von den Folgen der Fehler in den Messungen.

§. 201. Da wir auf dem Felde, diejenigen Stücke, welche zur Bestimmung der unbekanten Größen dienen, nie vollkommen genau messen können, sondern bey allen Messungen immer gewisse Fehler, die nach dem Verhältniß der Güte eines Werkzeugs, und der Sorgfalt des Beobachters, bald mehr bald minder erheblich sind, zu befürchten haben, so ist es die Pflicht eines Geometers, die Umstände zu bestimmen, unter welchen die Fehler in den gemessenen Stücken, auf die Bestimmung der unbekanten, einen großen oder geringen Einfluß haben; diese Lehre von der Berechnung der Folgen der Fehler wird ihm in vielen Fällen Anleitung geben, eine glückliche Auswahl der

zu messenden Stücke auf dem Felde zu treffen. Ich habe nun in den vorhergehenden Aufgaben, um den Vortrag nicht zu zerstreuen, nichts von dieser nothwendigen Berechnungsart beygebracht; ich werde aber das, worauf die Sache hauptsächlich ankomme, nun kürzlich im Zusammenhange vortragen können.

§. 202. Die Fehler die bey würklicher Messung der Linien vorfallen, habe ich meistens schon im III Kapitel beygebracht.

Bey Messung der Winkel sind aber die unvermeidlichen Fehler weit mannichfaltiger, sie hängen sowohl von dem eingetheilten Rande des Werkzeugs, als auch von dessen Stellung (X Kap.) der richtigen Bewegung des Fernrohres (XI Kap.) und noch mehreren Umständen ab; dergestalt daß es bey einem ausgemessenen Winkel, weit schwerer ist, den muthmaßlich begangenen Fehler, anzugeben, als es bey Messung gerader Linien geschehen kan.

Bey Bestimmung der Winkel auf dem Meßtische, setzt Marinoni (de Re ichnographica Lib. I. Cap. V. num. 5) die Möglichkeit des zu begehenden Fehlers auf 5 Minuten, vorausgesetzt, daß man nur ein gewöhnliches Diopterlinial zum Visiren braucht, und sonst mit aller möglichen Vorsicht zu Werke geht. Er bestätigt dieses auch durch würkliche Versuche die man a. a. O. selbst nachlesen kan.

Bey Messung der Winkel, mit einem Astrolabio von gewöhnlicher Größe, nemlich von ohngefähr einem Fuße im Durchmesser, das sonst übrigens mit möglichster Sorgfalt des Mechanici verfertiget und mit einem Fernrohre versehen ist, will ich den grösten Fehler, der auch bey aller Aufmerksamkeit und Vorsicht, unvermeidlich ist, auf 2 bis 3 Minuten ansetzen, wovon ich mich durch die Erfahrung überzeugt habe, indem ich einerley Winkel zu verschiedenen Zeiten maaß, und die Resultate mit einander verglich. Denn wenn gleich in den Abtheilungen des Randes vielleicht keine Fehler von dieser Größe sind, oder wenn man dieselben auch gleich durch Prüfungen ausfindig gemacht hätte, und dem ausgemessenen Winkel die daher rührende Korrection gäbe, so können doch andere Umstände, z. E. eine etwas unrichtige Stellung des Werkzeugs, eine etwanige Excentricität, die Unvollkommenheit des Gesichts u. s. w. zusammen genommen bey einem so kleinen Instrumente, gar leicht einen Irrthum von 2 bis 3 Minuten hervorbringen, und ob zwar gleich in vielen Fällen die Beträchtlichkeit des Fehlers nicht von der angegebenen Größe seyn mögte, so muß man doch in der Theorie von den Folgen der Fehler ein für allemal etwas bestimmtes festsetzen, und hierzu muß man allemal den grösten unvermeidlichen Fehler annehmen,

der sich von der Natur und Größe eines Werkzeugs erwarten läst.

Bey der gewöhnlichen Einrichtung der Boussolen, wird man bey Messung eines Winkels mit diesem Werkzeuge, einen Fehler von 15 bis 20 Minuten, wohl schwerlich vermeiden können; daher werde ich bey den Boussolen den grösten unvermeidlichen Fehler auf 15 bis 20 Min. ansetzen.

§. 203. Die Fehler welche in einem ausgemessenen Winkel zu befürchten sind, können nun entweder den Winkel zu groß oder zu klein angeben, d. h. wenn man den ausgemessenen Winkel $= A$, die Größe des unvermeidlichen Fehlers $= \alpha$ nennet, so ist der wahre Winkel entweder $A - \alpha$ oder $A + \alpha$. Welches nun von beyden in einem besondern Falle statt findet, läst sich nicht entscheiden, sondern man muß beydes annehmen, und die Folgen davon berechnen.

Da solchergestalt die begangenen Fehler bald positiv bald negativ sind, so erhellet daß es zur Richtigkeit einer Messung gar vieles beytrage, wenn man die Größen zu wiederholtenmahlen misset, und aus allen das Mittel nimt. Wenn daher z. E. ein Winkel mit einem Astrolabio viermahl gemessen würde, und man aus allen vier Resultaten ein Mittel nähme, so würde man den Winkel mit einer viermahl geringern Unrichtig-

tigkeit finden, als wenn man ihn z. E. nur einmahl mäße.

Da es aber auf dem Felde eine sehr große Verzögerung der Arbeit seyn würde, alle Grössen zu wiederhohltenmahlen zu messen, so läst man es meistens, wenn nicht eine ausserordentliche Schärfe erfordert wird, bey der einmahligen Messung bewenden, und nimmt an, daß man einem so großen Fehler ausgesetzt sey, als man von der Natur des gebrauchten Werkzeugs zu befürchten hat, und sucht nun die Folgen desselben, d. h. dessen Einfluß auf die unbekanten Grössen zu berechnen.

§. 204. Setzt man nun muthmaßlich ein für allemahl einen gewissen Fehler fest, so wird es gar sehr auf die Lage der bekanten Grössen gegen die unbekanten ankommen, ob die in den gemessenen Linien und Winkeln begangene Fehler, auf die Bestimmung der unbekanten Stücke einen beträchtlichen Einfluß haben, oder nicht. Um hievon nur in einer Zeichnung einen ohngefähren Begrif zu geben, und den Grund zu folgenden Untersuchungen zu legen, so will ich annehmen B Fig. LXIV sey ein Object auf dem Felde, dessen Weite von A man aus der gemessenen Standlinie AC und den beyden Winkeln BAC, BCA bestimmen wolte.

Gesetzt nun, der Winkel BCA und die Standlinie AC seyen richtig gemessen worden, den Winkel BAC habe man aber um den kleinen Winkel BAb falsch gemessen, dergestalt daß also BAC den wahren Winkel, bAC den falsch gemessenen vorstellet, so erhellet, daß man aus dem Winkel C der Standlinie AC, und dem unrichtigen Winkel bAC nicht die wahre Weite AB, sondern eine ganz andere Ab finden würde, weil man statt des wahren Dreyecks ABC, das unrichtige AbC erhielte. Um so viel also Ab kleiner oder größer ist als AB, so viel beträgt in Absicht der Weite AB, die Folge des Fehlers, den man in Messung des Winkels BAC begangen hat.

Hier in der Figur ist nun die Standlinie AC so angenommen, daß das Dreyeck BAC ohngefähr gleichschenklicht ist.

Man setze aber, die Weite AB zu bestimmen, hätte man nicht die Standlinie AC sondern eine andere Ac angenommen, welche mit AB einen sehr stumpfen Winkel cAB macht. Ich will völlig wie vorhin annehmen, Ac, und der Winkel c seyen richtig, der Winkel an A aber, nemlich cAB, wieder um den kleinen Winkel BAß falsch gemessen worden, und will setzen daß BAß = BAb sey, so erhellet, daß man dadurch eigentlich nicht das wahre Dreyeck cAB, sondern wieder

das

das unrichtige cAβ, mithin auch nicht, die wahre Weite AB, sondern Aβ finden würde. Nun wird man aber schon aus der blossen Zeichnung sehen, daß wegen Ac = AC, und βAB = BAb der Unterschied AB — Aβ weit beträchtlicher seyn werde, als der Unterschied AB — Ab.

Diese Unterschiede drücken aber den Fehler aus, welchen man in der Seite AB zu befürchten hat, wenn man selbige entweder aus der Standlinie Ac, oder AC bestimmen will. Es ist also klar, daß wenn man gleich in Messung des Winkels A an beyden Standlinien einerley Fehler begienge, derselbe dennoch bey Auswahl der Standlinie Ac, die Weite AB mit einer größern Unrichtigkeit geben würde, als bey Wahl der Standlinie AC und man siehet leicht, daß dies daher rühren müsse, weil bey Annehmung der Standlinie Ac, der Winkel cAB sehr stumpf ist, hingegen CAB an der Standlinie AC eine mäßige Größe hat. Es ist hieraus zureichend begreiflich, daß die richtige Bestimmung der unbekanten Stücke (wie z E AB) sehr von einer schicklichen Auswahl der willkürlichen oder bekanten Größen abhänge, daß gleichgroße Fehler in den gemessenen Stücken, gar verschiedenen Einfluß auf die Bestimmung der unbekanten haben können. Woraus dann ferner folgt, daß ein schlechteres Instrument, bey einer schicklichen Auswahl der willkürlichen Standpuncte und Linien, oft eben

so

so gute Dienste leistet, als ein gutes Werkzeug, bey schlimmern Umständen; und daß z. E. ein Fehler von 10 Minuten, bey Messung der Winkel an der Standlinie AC, vielleicht nicht so gefährlich ist, als ein Fehler von 1 Minute, in den Winkeln an der Standlinie Ac.

Dieses gegebene Beyspiel wird nun einigermaaßen den Nutzen zeigen, den man von der Theorie und Berechnung der Folgen der Fehler zu erwarten hat.

Die allgemeine Theorie hievon bloß synthetisch vorgetragen, findet sich in Hrn. Marinoni obenwähnten Werke, im zweiten Theile. Sein Vortrag ist aber so weitläuftig, und mit so beschwerlichen Demonstrationen und Figuren begleitet, daß man gar leicht dabey ermüdet. — Und am Ende siehet man doch nicht ein, worauf eigentlich die Sache ankomme.

Ich werde nun diese Theorie nicht synthetisch, sondern analytisch behandeln, und mich hierzu der Trigonometrischen Sätze bedienen, die ich im vorhergehenden bereits beygebracht habe, weil hiedurch diese Lehre theils allgemeiner theils sehr viel kürzer und weniger ermüdend, vorgetragen werden kan. Diejenigen, welche sich vor etwas Buchstabenrechenkunst fürchten, dürfen freylich dieses Kapitel nicht lesen, allein diese würden

auch

auch Hrn. Marinoni verwickelten synthetischen Beweise nicht einsehen.

Da nun auf dem Felde die unbekanten Stücke, durch ein oder mehrere Dreyecke, an denen man eine zureichende Anzahl von Seiten und Winkeln misset, bestimmt werden, so erhellet, daß die Theorie von den Folgen der Fehler in zusammengesetzten Figuren, sich auf die Theorie derselben in einzeln Dreyecken gründe. Ich werde also erstlich zeigen, worauf die Sache bey bloßen Dreyecken ankomme, und dann auch von zusammengesetztern Fällen einige Beyspiele geben, woraus man denn gar leicht sehen wird, wie man in jedem Falle verfahren müsse.

Theorie von den Folgen der Fehler in einzeln Dreyecken.

§. 205. Bekantermaaßen ist ein Dreyeck durch drey gegebene Stücke bestimmt, vorausgesetzt, daß es nicht lauter Winkel sind. Die Lehre von den Folgen der Fehler kömt nun darauf an.

Wenn die drey gegebenen Stücke eines Dreyecks etwas falsch gemessen werden, also etwas größer oder kleiner genommen würden, als sie in der That sind, zu berechnen, in wieferne eines von den gesuchten Stücken des Dreyecks, dadurch verändert oder unrichtig werde. Diese

Ver-

Veränderung heist dann die Folge der in den gemessenen Stücken vorgefallenen Fehler, in Absicht des unbekanten Stückes.

Man könte die Frage schon durch die gemeine Trigonometrie auflösen, und so mögen auch diejenigen verfahren, die mit der Buchstabenrechnung nicht zurecht kommen können.

Gesetzt die Grundlinie eines Dreyecks wäre 100 Ruthen und die beyden Winkel an ihr 50°; 128°; man wolte berechnen, was in einer von den beyden übrigen Seiten z. E. derjenigen welche dem Winkel von 50° gegenüberstehet und die ich a nennen will, für ein Fehler entstände, wenn man statt der wahren Grundlinie von 100 R. z E. eine von 100 R. 8 Fuß, statt der wahren Winkel 50°, 128°, die falsch gemessenen 50° 4'; 128° 5', annähme, und also zum voraussetzte, daß in Messung der Grundlinie ein Fehler von 8 Fußen, in dem einen Winkel ein Fehler von 4', und in dem andern ein Fehler von 5' begangen worden wäre, und zwar daß man die erwähnten Grössen um so viel zu groß gemessen hätte; so könte man auf folgende Art verfahren.

Man berechne erstlich die Seite a, aus den Grössen 100 R. 8 Fuß; 50° 4'; 128° 5'. Und hierauf diese Seite a aus den Grössen 100 R.; 50°; 128°. Beyde Resultate ziehe man von

ein-

einander ab, so wird alsdann der Rest, die Folge der in der Grundlinie und den Winkeln, begangenen Fehler, in Absicht auf die Seite a anzeigen.

Wenn ich erstlich aus 100 Ruthen 8 Fuß, 50° 4′; 128° 5′ die Seite a berechne, so finde ich dieselbe = 23942 Fuß
Aber aus 100 R.; 50°; 128½°; wird sie = 21950 Fuß

Unterschied = 992 Fuß.

Hieraus erhellet also, daß die Seite a um 992 Fuß ungewiß wäre, wenn man in den Winkeln an der Grundlinie, nur einen Fehler von 4 bis 5 Minuten begangen hätte, und der Fehler der Grundlinie selbst nur 8 Fuß betrüge.

Auf diese Art würde man nun auch in andern Fällen, bloß durch gemeine Trigonometrie, die Folge der begangenen Fehler berechnen. Allein da man theils immer zwey Dreyecke, nemlich das fehlerhafte und das wahre auflösen muß; und übrigens auch in vielen Fällen die Rechnung solchergestalt zu weitläuftig ausfällt, so will ich diese Methode bloß denenjenigen überlassen, die nicht mit der Buchstabenrechnung zu rechte kommen können, und nun zeigen, wie man weit bequemer und allgemeiner durch algebraische Formeln zum Endzweck gelangt.

§. 206.

§. 204. Wenn eines Dreyecks PQR Fig. LXV, Seiten PR = q; QR = p; PQ = r, und die gegenüberstehenden Winkel, Q, P, R, genennt werden, so hat man für die Auflösungen der Dreyecke, folgende zwo allgemeine trigonometrischen Formeln

I) $p \sin R = r \sin P$

II) $q^2 + r^2 - 2qr \cos P = p^2$ (Trig. S. XVII)

Diese beyden Auflösungen enthalten fast alle vorkommenden Fälle, und wenn man in jeder dieser Formeln, allemahl drey Größen als bekant ansiehet, so läst sich daraus die 4te durch Rechnung finden.

Es scheinet, zwar, der Fall, wo aus den zween Winkeln P, Q, und der dazwischen liegenden Seite r, das übrige gesucht würde, nicht mit unter diesen beyden Formeln enthalten zu seyn. Allein wenn man einiges Augenmerk auf die erste Formel richtet, so wird man finden, daß dieser Fall auch in ihr begriffen ist. Denn wenn man die beyden Winkel P, Q, von 180° abziehet so hat man den Winkel R; man setze also nur in die Formel I statt R den Werth 180° — P — Q so hat man die Auflösung für den Fall, wo aus zween Winkeln, und der dazwischen liegenden Seite das übrige gesucht wird.

Ferner

Ferner ist auch der Fall, wo aus den beyden Seiten und dem eingeschlossenen Winkel, einer von den beyden übrigen Winkeln gesucht würde, nicht mit unter den beyden Formeln begriffen. Ich habe aber denselben mit Fleiß ausgelassen, weil es auf dem Felde sehr selten vorkömt, daß man einen Winkel sucht.

Da nun solchergestalt, diese Formeln allgemein die Verhältnisse, zwischen den bekanten und gesuchten Grössen eines Dreyecks ausdrücken, so erhellet, daß man vermittelst derselben auch allgemein bestimmen könne, um wie viel sich die gesuchten Grössen verändern, wenn man die bekanten Grössen, etwas falsch gemessen hätte, und sie also etwas anders annähme, als sie würklich sind.

Da man ferner die in den gemessenen Grössen begangenen Fehler, als Veränderungen dieser Grössen ansehen kan, weil sie etwas grösser oder kleiner angenommen werden, als sie würklich sind, so siehet man leicht, daß die Untersuchung darauf ankomme, zu finden, um wie viel sich obige beyde Formeln verändern, wenn man jede Grösse ihr, sich etwas verändern läst.

Aus dem vorhergehenden (Trig. S. XXVII) ist bekant daß wir die Veränderung einer Grösse mit dem davor gesetzten Buchstaben d bezeichnen.

Die Ausdrückungen dp, dq, dr, dQ, dP u. s. w. werden also die Werthe bezeichnen, um die des Dreyecks Seiten p, q, r oder Winkel Q, P u. s. w. grösser oder kleiner genommen werden als sie würklich sind, und werden folglich die vorgefallenen Fehler in den Seiten oder Winkeln andeuten, dergestalt, daß wenn p, q, Q u. s. w. die wahren Grössen sind, $p + dp$; $q + dq$; $Q + dQ$ u. s. w. die fehlerhaften darstellen.

Es erhellet, daß, wenn die falsch gemessenen Stücke grösser sind als die wahren, die Werthe von dp, dq u. s. w. positiv sind; hingegen negativ, wenn die Grössen zu klein gemessen worden:

Wir wollen nun untersuchen, wie man auf eine bequeme Weise, in jedem Falle das Verhältniß zwischen den Fehlern, oder zwischen den Werthen von dp, dq, dQ u. s. w. in einem Dreyecke bestimmen könne; und da dp, dq, dQ u. s. w. in Absicht der Grössen p, q, Q, selbst, als sehr geringe angenommen werden, so können wir dazu, die zu Anfange dieses Buches beygebrachten Formeln, für die Aenderungen, der Producte, Quotienten u. s. w. mit Nutzen gebrauchen.

Aufgabe.

§. 207. In einem Dreyecke PQR sind gemessen worden; die beyden Winkel P, Q, und die Grundlinie r, man verlangt zu wissen, um wie

wie viel sich eine von den beyden übrigen Seiten z. E. p verändere, wenn die Grössen P, Q, r etwas falsch gemessen worden.

Aufl. I. Man verlangt also in dem Dreyecke PQR, das Verhältniß zwischen den Werthen dp, dQ, dP, dr.

II. Um dasselbe zu finden, suche man erstlich die Gleichung zwischen den Grössen P, Q, r, p;

III. Sie ist nach der I Formel des 206 §. folgende

$$p \sin(180° - P - Q) = r \cdot \sin P \text{ oder}$$
$$p \sin(P + Q) = r \sin P.$$

IV. Man überlege nun, daß, wenn in dieser Formel sich die Grössen p; r; P; Q um etwas verändern, sich auch die Producte p sin (P + Q); r sin P; verändern, und weil diese Producte gleich sind, so werden auch ihre Aenderungen gleich seyn.

V. Ich suche nun erstlich die Aenderung des Products p sin (P + Q) wenn ich annehme, daß sich p um dp, P um dP, Q um dQ verändert.

VI. Dies finde ich nach der Formel Trig. S. XXXIV. indem ich das dortige $x = p$, das dortige $y = \sin(P + Q)$ setze; so wird wegen

$d(xy) = xdy + ydx$ hier

$d(p \sin(P+Q)) = pd \sin(P+Q) + \sin(P+Q)dp.$

Nun ist aber d sin (P+Q) die Veränderung eines Sinus, und kan daher nach (Trig. S. XXVIII) berechnet werden, wenn man das dortige $a = P+Q$ setzet; dies giebt demnach wegen $da = dP+dQ$ (Trig. S. XXXI) den Werth von

$$d \sin (P+Q) = (dP+dQ) \cos (P+Q)$$

Mithin wird die Veränderung des erwähnten Products

$$= p(dP+dQ)\cos(P+Q) + \sin(P+Q)\,dp.$$

VII. Auf gleiche Weise suche ich die Veränderung des Products $r \sin P$, wenn sich nemlich r um dr, P um dP ändert.

Man setze also in die Formel (Trig. S. XXXIV) jetzt: $x = r$, $y = \sin P$ so wird

$$d(r \sin P) = r\,d \sin P + \sin P\,dr$$

Aber $d \sin P = dP \cos P$ daher

die Veränderung des Produkts $r \sin P$

$$= r\,dP \cos P + \sin P\,dr.$$

VIII. Die beyden Werthe für die Veränderungen der erwähnten Producte einander gleich gesetzt, geben nun eine Gleichung zwischen den Grössen, dP, dQ, dr, dp, d. h. eine Gleichung zwischen den Fehlern, in den Winkeln und Seiten eines Dreyecks, und es erhellet leicht, wenn drey von diesen Grössen z. E. dP, dQ,

dQ, dr, gegeben wären, man die 4te dp durch Rechnung finden könne, wodurch also angezeigt würde, was die in den beyden Winkeln, P, Q, und der Standlinie r begangenen Fehler für einen Fehler in der Seite p hervorbringen.

Allein da die Gleichung welche sich aus (VI. VII) ergiebt, etwas weitläuftig ausfällt, und wir noch einige Reductionen vornehmen müsten, sie auf den kürzsten Ausdruck zu bringen, so will ich zeigen, wie man in der jetzigen Aufgabe, die Gleichung zwischen den Fehlern dP, dQ, dr, dp noch auf eine weit leichtere Art finden könne.

IX. Weil nemlich die Gleichung III. aus ein paar Producten bestehet, die einander gleich sind, so erhellet, daß die Logarithmen derselben gleich seyn müssen. Es ist also

$$l\,p + l\sin(P+Q) = l\,r + l\sin P$$

X. Folglich hat man auch

$$d\log p + d\log\sin(P+Q) = d\log r + d\log\sin P.$$

XI. Aber aus Trig. S. XLVI (das dortige $x = p$ gesetzt) ist

$$d\log p = B.\frac{dp}{p}\text{; und eben so } d\log r = B.\frac{dr}{r}$$

Ferner aus Trig. S. XLVII das dortige $a = P$ gesetzt, folgt

$d \log \sin P = B\, dP \cot P$ und eben so

$d \log \sin (P+Q) = B\,(dP + dQ) \cot (P+Q)$

Diese Werthe nun in die Gleichung X substituirt, und durchgängig mit B dividirt, geben

$$\frac{dp}{P} + dQ \cot(P+Q) = \frac{dr}{r} + (\cot P - \cot(P+Q))\,dP$$

XII. Nun ist aber $\cot P = \frac{\cos P}{\sin P}$ und

$$\cot(P+Q) = \frac{\cos(P+Q)}{\sin(P+Q)}$$ daher

$$\cot P - \cot(P+Q) = \frac{\sin(P+Q)\cos P - \sin P \cos(P+Q)}{\sin P \sin(P+Q)}$$

$$= \frac{\sin Q}{\sin P \sin(P+Q)}$$ (Trig. S. XII)

XIII. Dieser Werth also in die Gleichung XI substituirt giebt

$$\frac{dp}{p} + dQ \cot(P+Q) = \frac{dr}{r} + \frac{\sin Q}{\sin P \sin(P+Q)} \cdot dP$$

wo ich künftig der Kürze halber $\cot(P+Q) = N$ und

sin

$$\frac{\sin Q}{\sin P \sin (P+Q)} = M \text{ mithin}$$

$$\frac{dp}{p} + N\,dQ = \frac{dr}{r} + M\,dP$$

setzen will.

XIV. Diese Gleichung zwischen den Fehlern in den Seiten und Winkeln, ist nun ohnstreitig so kurz als möglich und hat den Vortheil, daß die Glieder $\frac{dp}{p}$, $\frac{dr}{r}$ blos von den Seiten des Dreyecks, hingegen $N\,dQ$, $M\,dP$ bloß von den Winkeln desselben abhängen, welches zu verschiedenen Folgerungen nützlich seyn kan.

Zugleich ist diese Gleichung auch besonders bequem die Verhältnisse der Fehler zu ihren zugehörigen Seiten zu finden; denn die Quot. $\frac{dp}{p}$, $\frac{dr}{r}$, drücken eigentlich aus, wie groß die Fehler dp, dr, in Absicht ihrer zugehörigen Seiten p, r, sind; und oft verlangt man nicht den absoluten Werth des Fehlers, sondern vielmehr dessen Verhältniß zur zugehörigen Grösse.

Wenn man also z. E. für den Quotienten $\frac{dp}{p}$

den Werth $\frac{1}{1000}$ fände, so zeigte dieses an, daß man um ein Tausentheilgen des ganzen gefehlet hätte, dergestalt, daß wenn z. E. die Seite $p = 1000$ Ruthen wäre, der Fehler derselben 1 Ruthe betrüge.

Uebrigens ist hier noch zu bemerken, daß die Werthe von dP, dQ, die Fehler in den Winkeln, nicht in Minuten und Sekunden bedeuten, sondern vielmehr in Decimaltheilgen des Sinus totus, der durchgängig $= 1$ gesetzt worden: sind aber dP, dQ, würklich in Sekunden gegeben, so muß man statt dP, dQ, eigentlich die Werthe $\frac{dP}{206264}$, $\frac{dQ}{206264}$ setzen, damit man ihren Werth in Decimaltheilen des Sinus tot. erhalte.

Die gefundene Formel wird nun dazu dienen, in jedem Falle die Folge der Fehler, und deren Verhältniß zu den zugehörigen Grössen zu finden. So z. E wenn man in dem Dreyecke PQR, die beyden Winkel P, Q, und die Grundlinie r, um dP, dQ, dr, falsch gemessen hätte, und wolte deren Erfolg auf die Seite p, finden; so dürfte man nur in obiger Gleichung den Werth von $\frac{dp}{p}$ suchen. Also würde

$$\frac{dp}{p} = \frac{dr}{r} + M\,dP - N\,dQ.$$

Wolte

Wolte man z. E. aus den falsch gemessenen Grössen P, Q, p, den Fehler in der Grundlinie r bestimmen so hätte man

$$\frac{dr}{r} = \frac{dp}{p} - M\,dP + N\,dQ$$

u. s. w. Woraus also erhellet, daß wenn von den 4 Fehlern dP, dQ, dr, dp, drey als gegeben angesehen werden, man den 4ten durch Rechnung finden könne.

XV. Die bisherige Rechnung setzt zum voraus daß wenn die wahren Grössen, P, Q, p, r, sind, die fehlerhaften P + dP, Q + dQ, p + dp, r + dr heisen, mithin die Fehler dP, dQ, dp, dr, positiv sind, und die Grössen P, q, Q, r, zu groß gemessen worden.

Es erhellet daß wenn die Seiten und Winkel zu klein gemessen wären, man in obiger Formel XIII, die Werthe dQ u. s. w. als negativ betrachten müsse.

Wenn in einer von den Grössen P, Q, r, p, keine Fehler vorgefallen sind, so siehet man ihre Veränderung als o an; in solchen Fällen werden also dP, dQ, u. s. w. = o gesetzt. Z. E. wenn man die Grundlinie r als richtig gemessen annimt, so ist dr = o mithin blos

$$\frac{dp}{p} = M\,dP - N.dQ$$

Und wenn auch Q richtig gemessen worden, so hätte man nur $\frac{dp}{P} = M\,dP$.

Woraus man also blos den Fehler fände, welcher in der Seite p, aus dem falsch gemessenen Winkel P herrührte.

Ueberhaupt wird also die algemeine Gleichung (XIII) unter den verschiedenen Voraussetzungen, die man den Werthen von dP, dQ u. s. w, giebt, eine Menge einzelner Fälle in sich enthalten, die man bey Hrn. Marinoni durch weitläuftige Demonstrationen und Figuren aus einander gesetzt findet.

XVI. Um das bisherige mit einem Beyspiele zu erläutern, so will ich setzen in dem Dreyecke PQR, seyen die Grundlinie $PQ = r = 100$ Ruthen, $P = 30° 6'$; $Q = 140° 8'$ würklich gemessen worden, man wolte daraus die Seite $RQ = p$ finden, und zugleich angeben, wie zuverläßig die Seite p gefunden würde, wenn die Grundlinie r um 2 Fuß, der Winkel P aber um 5 Minuten und der Winkel Q um 4 Minuten falsch, und zwar zu groß gemessen worden wäre. Die wahren Grössen würden also folgende seyn $r = 100$ Ruthen $- 2$ Fuß $= 998$ Fuß; $P = 30° 6' - 5' = 30° 1'$; $Q = 140° 8' - 4' = 140° 4'$, und die Werthe von $dr = +2$ Fuß; $dQ = +4' = +240''$; $dP = +5' = +300''$.

Weil

Weil nun für diesen Fall

$$\frac{dp}{p} = \frac{dr}{r} + M\,dP - N\,dQ$$

so erhält man folgendes

$$\frac{dr}{r} = \frac{2}{998} = \frac{1}{499} = 0{,}002$$

Ferner log N = l cot 170° 5′ = 0,7573897

l dQ = l 240 = 2,3802112

3,1376009

l 206264 = 5,3144252

3,8231757

dies giebt also

$$\frac{N\,dQ}{206264} = -0{,}006655$$

der eigentliche Werth von $\frac{N\,dQ}{206264}$ ist hier aus

der Ursache negativ weil die Cotangente von 170° 5′ oder der Werth von N, negativ ist. Ferner ist für das Glied

$$\frac{M\,dP}{206264} \text{ oder } \frac{\sin Q\,dP}{\sin P \sin (P+Q)\,206264}$$

log

$\log \sin Q = l \sin 140° 4' = 9{,}8074646 - 10$
$l\,dP = l\,300 = 2{,}4771213$

$\log$ des Zählers $= 2{,}2845859$

$l \sin P = l \sin 30° 1' = 9{,}6991887 - 10$
$l \sin (P+Q) = l \sin 170° 5' = 9{,}2360726 - 10$
$l\,206264 = 5{,}3144252$

$\log$ des Nenners $= 4{,}2496865$

also $\log \frac{M\,dP}{206264} = 3{,}0348994 - 5$

nemlich nachdem die Characteristik des Log. des Zählers um 5 Einheiten vermehret worden, also

$$\frac{M\,dP}{206264} = 0{,}01083$$

Unter denen im Exempel angenommenen Umständen wird also

$$\frac{dp}{p} = 0{,}002 + 0{,}01083 - (-0{,}006655)$$
$$\frac{dp}{p} = 0{,}002 + 0{,}01083 + 0{,}006655$$

oder $\frac{dp}{p} = +0{,}01948$ beynahe $= 0{,}02$

Es erhellet also daß die angenommenen Fehler in den Messungen von P, Q, r, einen solchen Einfluß auf die Seite p haben, daß man nur bis auf $\frac{2}{100}$ oder $\frac{1}{10}$ ihrer Grösse sicher ist;

woraus

woraus also klar ist, daß die kleinen Fehler in Messung der Grössen P, Q, r, hier auf die Seite p einen ziemlich beträchtlichen Einfluß haben. Dieser Bruch $\frac{1}{50}$ zeigt nun blos die Grösse des Fehlers dp in Verhältniß zur Seite p an, wolte man den wahren Fehler dp in Ruthen und Fussen ausfinden, so dürfte man nur aus den oben angenommenen Datis die Seite p würklich berechnen, und ihren 50ten Theil nehmen, so hätte man die absolute Grösse des Fehlers in Ruthen und Fussen. Ich will aber hier die Rechnung nicht anstellen;

XVII. Dieses Exempel setzt voraus, daß alle Grössen auf dem Felde zu groß gemessen wurden; es ist klar, wenn einige davon zu klein gemessen worden wären, man nur die zugehörigen Werthe dQ, u. s. w. verneint nehmen müsse. Dies verändert also in der ganzen Rechnung nichts als,

daß man blos die Zeichen, der Glieder $\frac{dr}{r}$;

NdQ; MdP jedesmahl gehörig verändert.

Zum Exempel wenn die Seite r um 2 Fuß zu klein gemessen worden, das übrige aber mit vorhergehendem Exempel einerley bliebe, so wäre

$$\frac{dp}{p} = -0{,}002 + 0{,}01083 + 0{,}00665$$

$$= +0{,}01548$$

Wäre

Wäre aber auch der Winkel Q um 4 Minuten zu klein gemessen worden so hätte man

$$\frac{dp}{p} = -0{,}002 - 0{,}01083 + 0{,}00665$$
$$= -0{,}00618$$

Im letztern Beyspiele wäre also der Fehler in der Seite p auch negativ, betrüge aber nur ohngefähr, 0,006 oder $\frac{1}{166}$ der Seite p, wäre also bey weiten nicht so beträchtlich, als wenn alle Grössen auf dem Felde zu groß gemessen worden wären, wie in (XVI).

XVIII. Nachdem solchergestalt, für gewisse Werthe von dQ, dr, dp die Grössen MdP u. s. w. einmal berechnet sind, so kan man gar leicht ausfindig machen, unter welchen Umständen der Werth von $\frac{dp}{p}$ am grösten wird. Man siehet leicht daß in dem obigen Beyspiele $\frac{dp}{p}$ am grösten wird, wenn alle Grössen P, Q, r zu groß gemessen worden, oder wenn dQ, dP, dr insgesamt positiv sind, denn in diesem Falle wurden alle Werthe $\frac{dr}{r}$, MdP u. s. w. zusammenaddirt

(XVI). Hingegen in XVII. sind einige Glieder bejaht

bejaht andere verneint, welches denn nothwendig für $\frac{dp}{p}$ einen geringern Werth hervorbringen muß.

XIX. Hieraus zeigt sich zugleich der Vortheil, den die bisher gewiesene algebraische Methode, die Folgen der Fehler zu berechnen, in Absicht der in §. 205 erwähnten gemeinen trigonometrischen Methode hat. Nach letzterer müste man für jede Voraussetzung, die man den Werthen von dQ, dr, dP, in Absicht des + oder — geben kan, zwey Dreyecke berechnen um den Werth von dp zu finden; und da es sich nicht so gleich übersehen läst, wie man in einem gewissen Falle, die Werthe von dQ, dr, dP bejaht oder verneint nehmen muß, um das gröste dp zu finden, so wird man offenbar, eine Menge von Dreyecken berechnen müssen, bis man die gröste Folge der begangenen Fehler findet. Dies ist aber hingegen bey der algebraischen Berechnung nicht nothwendig; denn wenn man für gegebene dQ, dP, dr, einmahl die Werthe von MdP, $\frac{dr}{r}$ u. s. w. berechnet hat, so braucht man weiter nichts, als diese Glieder bald positiv bald negativ zu nehmen, und so ihre Summe zu untersuchen; woraus denn gar bald erhellen wird, wie man die für dQ, dP, dr angenommenen Grössen positiv oder negativ nehmen

men müsse, damit man das gröste dp, oder den grösten Einfluß der Fehler, in Absicht der Seite p, finde. Um sich von der Weitläuftigkeit der gemeinen Trigonometrischen Methode noch mehr zu überzeugen, so lese man hierüber nur z. E. den 187 §. von **Wilkens Landesvermessungen**, wo in dem dortigen Exempel sieben Dreyecke aufgelöset werden, um den grösten Fehler der Seite p zu finden.

Es ist klar, daß es für einen vorgegebenen Fall, nothwendig ist, unter allen den Werthen, die $\frac{dp}{p}$, erhalten kan, vorzüglich auf den grösten Rücksicht zu nehmen, weil dieser die gröste mögliche Zuverläßigkeit der gesuchten Seite p bestimt. Denn ob man gleich nicht weiß, welche von den gegebenen Grössen P, Q, r, zu groß oder zu klein gemessen worden, und man folglich ungewiß ist, ob man die für dP, dQ, dr angenommenen Werthe, positiv oder negativ nehmen müsse, so muß man doch unter allen den Voraussetzungen, die man in Absicht des + oder — diesen Grössen dP, dQ, dr, geben kan, gerade diejenige wählen, welche für $\frac{dp}{p}$ den grösten Werth giebt, weil dieser Fall würklich vorhanden seyn kan, und daher die möglichste Zuverläßigkeit entscheidet, welche in der Seite p zu erwarten stehet.

Einige

Einige Folgerungen aus dem bisherigen.

§. 208. I. Wenn die Grundlinie r sowohl, als auch der Winkel Q als richtig gemessen angenommen wird, mithin $dr = 0$, $dQ = 0$ sind, so hat man bloß

$$\frac{dp}{p} = MdP.$$

Es erhellet also, daß wenn in allen Dreyecken, wo die auszumessende Seite p mit der Standlinie PQ einen gewissen Winkel Q macht, den man als richtig gemessen ansiehet, in dem Winkel P gleich grosse Fehler begangen werden, sich dp oder der daraus entspringende Fehler in der Seite p, zu dieser Seite p selbst verhalten werde wie 1 : M, daß sich folglich der Grad der Zuverläßigkeit in der Seite p, oder der Werth von $\frac{dp}{p}$ (§. 207 XIV.) verhalten werde wie M oder wie $\frac{P}{\sin P \sin(P+Q)}$, daß also die Unrichtigkeit der gesuchten Seite p von den Winkeln P, Q, abhänge, folglich bald grösser, bald kleiner seyn könne, je nachdem die Standlinie r gegen die Seite p diese oder jene Lage hat. Es frägt sich nun, wie müssen z. E. die Winkel P, Q an der Standlinie beschaffen seyn, daß unter allen möglichen Standlinien, der Fehler $\frac{dp}{p}$ so klein als möglich werde?

Da ich nun solchergestalt den Winkel Q als gegeben, und richtig gemessen annehme, so läuft die Frage darauf hinaus; wie groß muß man P nehmen, damit der Bruch $\frac{\sin Q}{\sin P \sin (P+Q)}$ den kleinsten Werth erhalte?

Um dieses zu entscheiden, so errinnere man sich aus der Lehre von Brüchen, daß, wenn eines Bruchs Zähler, unverändert bleibt, der Bruch desto kleiner werde, je grösser sein Nenner wird. Da nun bey oberwähnten Bruche der Zähler $\sin Q$ unverändert bleibt, weil Q als gegeben angesehen wird, so wird dieser Bruch einen desto kleinern Werth haben je grösser sein Nenner, also das Producкt $\sin P \sin (P+Q)$ ist. Um aber zu finden was man für P annehmen müsse, daß dieses Producкt am grösten werde, so überlege man folgendes

Weil $\sin (P+Q) = \sin (180° - P - Q)$ so ist auch das erwähnte Producкt

$$= \sin P \cdot \sin (180° - P - Q)$$

Man setze in Trig. S. XIII. 10. das dortige $\beta = 180° - P - Q$ das dortige $\gamma = P$ so wird

$$\sin P \sin (180° - P - Q) = +\tfrac{1}{2}\cos (180° - 2P - Q) - \tfrac{1}{2}\cos (180° - Q)$$

Weil nun $\frac{1}{2}$ cos (180° — Q) wegen des gegebenen Winkels Q, als unveränderlich angesehen wird, so erhellet, daß das oberwähnte Product am grösten seyn werde, wenn cos (180° — 2P — Q) den grösten möglichen Werth hat.

Nun ist aber kein Cosinus grösser als der Sinus totus, oder als der Cosinus von 0°, es erhellet also daß wenn 180° — 2P — Q ≡ 0 ist, alsdann cos (180° — 2P — Q) den grösten möglichen Werth haben werde.

Also ist das Product sin P sin (180° — P — Q) oder auch sin P sin (P + Q) am grösten, mithin der oberwähnte Bruch am kleinsten, wenn

$$180° - 2P - Q \equiv 0$$ also

der Winkel $P \equiv 90° - \frac{1}{2} Q$ ist.

Nun ist aber ferner der Winkel R in dem bisher betrachteten Dreyecke ≡ 180° — P — Q folglich statt P den gefundenen Werth $90° - \frac{1}{2} Q$ substituirt

$$R \equiv 180° - 90° + \frac{1}{2} Q - Q \equiv 90° - \frac{1}{2} Q$$

Es ist also R ≡ P

d. h. die Standlinie r Fig. LXV, die mit der auszumessenden Weite p, einen gegebenen Winkel Q macht, muß so lang genommen werden, daß der Winkel R ≡ P werde, mithin das Dreyeck gleichschenklicht, und die Standlinie

r = p sey. Unter solchen Umständen wird der Fehler, den man in Messung des Winkels P begehet, den kleinsten Einfluß auf die Seite p haben, weil alsdann das Product MdP am kleinsten wird.

Es wird also die Entfernung p am vortheilhaftesten gefunden, wenn man die Standlinie r, sucht, so viel als möglich, der auszumessenden Entfernung p gleich zu nehmen. Ob sich gleich dieses auf dem Felde nicht immer thun läst, so muß man es doch, wenn es angehen kan, nicht unterlassen. Nach dem Augenmaaße, wird man übrigens immer schon ohngefähr die Weite p, so genau schätzen können, als nöthig ist, um die Länge der Standlinie r darnach einzurichten.

II. Wenn ich den in (I) gefundenen Werth von P in die Formel für M substituire, so finde ich

$$\frac{dp}{p} = MdP = \frac{\sin Q \; dP}{\cos \frac{1}{2} Q \cos \frac{1}{2} Q}$$

welches sich wegen $\sin Q = 2 \sin \frac{1}{2} Q \cos \frac{1}{2} Q$ (Trig. S. XIII. 21)

$$\frac{dp}{p} = \frac{2 \sin \frac{1}{2} Q}{\cos \frac{1}{2} Q} dP = 2 \operatorname{tang} \frac{1}{2} Q . dP$$

verwandelt.

Woraus also erhellet, daß, wenn die Standlinie r, die vortheilhafteste Länge hat, um die Seite p zu bestimmen, sich der Grad der Zuverläßig-

läßigkeit in der Seite p, oder $\frac{dp}{p}$ verhalte, wie die Tangente des halben Winkels Q, den die Standlinie mit der auszumessenden Seite p machet. Es wird also wegen des in dem Winkel P zu befürchtenden Fehlers dP, der Werth von $\frac{dp}{p}$ desto kleiner seyn je kleiner man Q nimmt;

Je mehr also die Länge der Standlinie r der auszumessenden Entfernung p gleich kömt, und einen desto kleinern Winkel Q, sie mit der Seite p machet, desto zuverläßiger wird die Seite p gefunden, oder desto weniger Einfluß, hat der im Winkel P begangene Fehler, auf die Seite p.

III. Da wir in (I) gesehen haben, daß die Standlinie ohngefähr so lang seyn muß, als die auszumessende Entfernung, so erhellet, daß wenn man auf eben die Art aus den beyden Winkeln P, Q, an der Standlinie, auch die andere Seite des Dreyecks, nemlich q, am richtigsten bestimmen wolte, man auch $q = r$ nehmen müsse. Da nun auch, um p am genauesten zu finden, $p = r$ zu dieser Absicht seyn muste, so erhellet daß, wenn die Standlinie r, oder die Grundlinie des Dreyecks, den beyden Seiten p, q, des Dreyecks gleich ist, alsdann aus denen an der Grundlinie gemessenen Winkeln, die beyden Seiten des Dreyecks am zuverläßigsten gefunden werden.

Aber wenn p = q = r, so ist das Dreyeck PQR gleichseitig, und folglich jeder Winkel = 60°

Es erhellet also, daß, wenn zwo Seiten eines Dreyecks auf dem Felde, mit der Standlinie Winkel von 60 Graden machen, oder wenigstens nicht viel von 60 Graden abweichen, alsdann die Standlinie die vortheilhafteste Lage habe, beyde Seiten dieses Dreyecks zu bestimmen.

Je mehr aber die Winkel an einer Standlinie auf dem Felde von 60 Graden abweichen, mit desto größerer Unrichtigkeit, findet man die Seiten dieses Dreyecks.

Es ist also hieraus begreiflich, wie schädlich es sey, Dreyecke auf dem Felde aus solchen Standlinien zu bestimmen, an denen die Seiten dieser Dreyecke, sehr spitze oder stumpfe Winkel machen.

Eine Folge hieraus ist nun z. E. diese.

Es seyen Fig. XLVI, S, R, W, T, U, Objekte auf dem Felde, deren Lage man sowohl unter sich, als gegen die Standlinie PQ bestimmen wolte.

Wenn man sich von diesen Punkten S, R u. s. w. nach beyden Standorten P, Q, gerade Linien gezogen vorstellet, so erhält man an der Standlinie

linie so viel Dreyecke, als man Objekte hat, und es erhellet, daß die Lagen von S, R, W, T u. s. w. durch die Seiten PS, QS; PR, QR u. s. w. bestimmet werden; diese Seiten findet man aber, aus der gemessenen Standlinie PQ, und den Winkeln, welche die Seiten der Dreyecke PSQ, PRQ u. s. w. mit der Standlinie machen. Wenn ich nun annehme in jedem Winkel würden kleine Fehler begangen, so erhellet, daß jeder Punkt S, R, W, T, mit einer kleinen Unrichtigkeit gefunden werden wird. Allein wenn man die Frage anstellen wolte, welches von allen Objekten S, R, W, T, U, wird die richtigste Lage gegen die Standlinie erhalten, auf welches haben die begangenen Fehler den geringsten Einfluß? so wird man nur untersuchen dürfen, wessen Objekts Winkel an der Standlinie, 60 Graden am nächsten kommen. Man siehet leicht, daß dieses hier z. E. das Objekt R seyn würde; weil die Winkel RPQ, RQP beyde zugleich, nicht viel von 60° abweichen.

Hingegen alle Punkte, wie z. E. T, U, die bey P, Q, sehr ungleiche Winkel TPQ, TQP, UPQ, UQP machen, werden sowohl unter sich, als auch gegen die Standlinie eine desto unrichtigere Lage erhalten, je mehr die oberwähnten Winkel von 60° abweichen, weil alsdann die in Messung der Winkel an der Standlinie zu befürchtenden Fehler, einen sehr grossen Einfluß

auf die Bestimmung der Punkte T, U, haben können.

Es ist also klar, daß, wenn man die Lage der Punkte T, U gegen die übrigen W, R, S, ungleich genauer finden wolte, man es nicht bey der Standlinie PQ, bewenden lassen, sondern eine neue z. E. PM annehmen müsse, an der die Winkel TPM, TMP u. s. w. näher an 60 Graden kommen, oder wenigstens nicht so stumpf ausfallen, wie die Winkel an der erstern Standlinie PQ. Denn die Entfernungen PT, MT, PU, MU, die die Lage der Punkte T, U, gegen die übrigen bestimmen, werden aus der Standlinie PM, gewiß weit sicherer, als aus der PQ gefunden.

IV. Da Fig. LXV eines Dreyeckes PRQ Seiten QR, PR, mithin auch der Punkt R am sichersten gefunden wird wenn jeder von den beyden Winkeln P, Q, nahe an 60° kömt, so setze man nur in obige Formel,

$$\frac{dp}{p} = \frac{\sin Q\, dP}{\sin P \sin (P+Q)} - \cot (P+Q)\, dQ$$

$Q = 60°$; $P = 60°$; so findet man, den Fehler in der Seite p, welcher bey der vortheilhaftesten Lage der Standlinie, noch statt finden kan, wenn die Winkel P, Q etwas fehlerhaft gemessen worden.

Dies giebt demnach

$$\frac{dp}{P} = \frac{dP}{\sin 60^\circ} + \text{tang } 30^\circ . dQ$$

Es ist klar daß eben dieser Ausdruck auch den Fehler $\frac{dq}{q}$ in der andern Seite q des Dreyecks ausdrücken werde, weil q, p gleiche Lagen gegen die Standlinie r haben. Nehme ich nun an daß in beyden Winkeln P, Q, einerley Fehler begangen werden, und zwar die grösten, die beym Gebrauche eines gewissen Winkelmessers unvermeidlich sind, setze ich also $dP = dQ$, so wird der Fehler welcher in beyden Seiten des Dreyecks daraus entspringet

$$= \frac{dp}{P} = \frac{dq}{q} = \left(\frac{1}{\sin 60^\circ} + \text{tang } 30^\circ\right) dP$$

Nun ist aber

$$\frac{1}{\sin 60^\circ} = \frac{1}{\cos 30^\circ} = \text{sec } 30 = 1,15470$$

und $\text{tang } 30^\circ = 0,57735$

also $\frac{dp}{P} = 1,73205 . dP$

wo man eigentlich statt dP setzen muß $\frac{dP}{206264}$

Diese Formel wird also zeigen, wie genau wegen der Fehler in den Winkeln P, Q, an der Grundlinie, die Seiten p, q, des Dreyecks, auch bey der vortheilhaftesten Lage der Grundlinie, gefunden werden können.

Wenn ein Winkelmesser die Winkel nur bis auf 1 Minute genau misset, wie genau können auch bey der vortheilhaftesten Lage der Grundlinie, die beyden Seiten des Dreyecks gefunden werden?

Man setze in unsere Formel $dl' = 1' = 60''$ so wird

$$\frac{dp}{p} = \frac{1{,}73205 \cdot 60}{206264} = \frac{104}{206264} \text{ beynahe}$$

oder beynahe $\frac{dp}{p} = \frac{5}{10000} = \frac{1}{2000}$

Man kan also bey jeder Seite p, q des Dreyecks nur bis auf $\frac{1}{2000}$ ihrer Länge sicher seyn. Das heist, man würde für jede 2000 Ruthen, die in der Seite des Dreyecks enthalten wären um 1 Ruthe fehlen.

Für einen Winkelmesser der nur bis auf 2 Minuten sicher mäße, wäre die Zuverläßigkeit in jeder Seite Dreyecks nur $\frac{1}{1000}$

Da man nun in Ausmessung der Winkel, vermittelst eines Astrolabii von gewöhnlicher Größe, auch bey aller nöthigen Sorgfalt, für einen Fehler von 2 Minuten nicht gut stehen kan (§. 202); so erhellet daß beym Gebrauche eines solchen Werkzeugs, auch bey den vortheilhaftesten Umständen, die Seiten eines Dreyecks auf dem Felde nicht genauer, als etwa bis auf $\frac{1}{1000}$ ihrer Länge sicher gefunden werden können. Um wie viel grösser würde also die Unzuverläßigkeit ausfallen, wenn die Standlinie gegen die beyden Seiten des Dreyecks eine minder vortheilhafte Lage hätte?

Es ist klar, daß in dem bisherigen vorausgesetzt worden, daß die Standlinie ihre gehörige Richtigkeit habe, also $dr = o$ sey. Wäre selbst auch die Standlinie etwas fehlerhaft gemessen worden, so würde daher, die Unrichtigkeit in Bestimmung der beyden Seiten des Dreyecks noch grösser seyn.

Man siehet hieraus, wie genaue Werkzeuge erfordert werden, wenn man auf dem Felde, nicht um den 1000ten Theil des ganzen fehlen will, wie viele Sorgfalt also überhaupt ein Geometer anwenden müsse wenn er sich von der Wahrheit nicht sehr entfernen will, und wie ungewissenhaft die Feldmesser verfahren, wenn sie bey wichtigen

Messungen, sich aus Nachläßigkeit vorsetzliche Fehler erlauben, besonders, wenn die Umstände einer Messung mißlich sind.

Das bisherige von (IV) angerechnet, beziehet sich eigentlich darauf, daß die möglichste Zuverläßigkeit der beyden Seiten des Dreyecks zugleich, gefunden werden soll; freylich könte die Zuverläßigkeit grösser seyn, wenn man nur eine Seite p suchte, denn da kan man nach (II) nur den Winkel Q an der Standlinie so klein machen, daß der Werth von $\frac{dp}{P} = \text{tang } \frac{1}{2}\,QdP$ (II) so unbeträchtlich wird, als man verlangt. Allein wenn beyde Seiten des Dreyecks zugleich, mit der möglichsten Genauigkeit gefunden werden sollen, so sind die vortheilhaftesten Umstände die, daß man die Winkel an der Standlinie so nahe als möglich an 60° zu bringen sucht. Dieser Fall ist nun eigentlich bey Grundlegung der Landschaften, und Bestimmung der Lage der Oerter gegen eine gewisse Standlinie wichtig, weil die Lage eines Ortes wie R gegen die Standlinie PQ, nicht bloß durch eine sondern durch beyde Seiten des Dreyecks zugleich bestimmt wird, und folglich jede mit möglichster Zuverläßigkeit gefunden werden muß, wenn R die richtigste Lage gegen P, Q haben soll.

V. Da es nicht allemal in des Feldmessers Gewalt stehet, die vortheilhaftesten Umstände einer Standlinie auf dem Felde auszuwählen, so werde ich, wenn anders die Umstände nicht gar zu mißlich sind, die möglichste Zuverläßigkeit, in Bestimmung zwoer Seiten eines Dreyecks, aus einer Standlinie, etwa auf $\frac{1}{400}$ ihrer Länge setzen, dergestalt, daß man auf jede 400 Ruthen, um eine Ruthe ungewis ist. Einen Fehler von dieser Grösse kan man einem Feldmesser wohl verzeihen, da im Durchschnitt genommen, diese Genauigkeit, in Bestimmung der Lage der Oerter gegen eine Standlinie immer noch erträglich, und wohl schwerlich, bey einem Winkelmesser, der nur, wie ich voraussetze, bis auf zwo Minuten genau misset, zu vermeiden ist, und ich zweifle gar sehr, ob in den meisten Messungen noch diese Genauigkeit zu erwarten stehet. Beym Gebrauche des Meßtisches, wird natürlicher Weise die Zuverläßigkeit noch geringer seyn, da bey diesem Werkzeuge die unvermeidlichen Fehler noch grösser sind als wir beym Astrolabio angenommen haben. In den meisten Fällen kan man immer setzen, daß beym Gebrauche des Meßtisches in Bestimmung zwoer Seiten eines Dreyecks aus einer Standlinie, die Genauigkeit derselben, sich wohl schwerlich auf $\frac{1}{200}$ ihrer Länge erstrecken wird. Versuche können auch leicht selbst davon überzeugen.

VI.

VI. Eine andere wichtige Folge für den Feldmesser ist hieraus diese, daß, wenn er aus einer gewissen Standlinie, wie PQ, Fig. XLVI die Lage der Oerter S, R, W, T, U, bestimmt hat, und nun wie es bey Grundlegung der Landschaften zu geschehen pflegt, aus den bereits bestimmten Oertern wieder andere bestimmen will, er von denen S, R, W, T, U, solche dazu auswähle, von denen man hoffen kan, daß die an der Grundlinie PQ begangenen unvermeidlichen Fehler auf sie keinen grossen Einfluß gehabt. Hier in der Figur würden z B. die Oerter T, U, am ungeschicktesten zu neuen Standpunkten gewählet werden können, weil theils ihre Entfernung T U zu klein ist, theils auch, weil in ihrer Bestimmung die wenigste Zuverläßigkeit zu hoffen ist, indem die Winkel an T, U, sehr spitz, und die an der Grundlinie, von 60° gar viel abweichen. Weit vortheilhafter wäre es aber, die Oerter R, W, zu neuen Standpunkten zu wählen, wie sich aus der Figur der Dreyecke RPQ, PWQ leicht übersehen läst. Dies leichte Beyspiel zeigt also, wie vorsichtig ein Feldmesser zu Werke gehen muß, wenn alle Oerter einer in Grund zu legenden Landschaft, ihre möglichst genaue Lage gegen einander erhalten sollen.

Ueberhaupt ist dies eine der wichtigsten Regeln für den Feldmesser, von den bereits erhaltenen Bestimmungen einer Messung nur solche

zu fernerer Bestimmung anderer Grössen auszuwählen, die am geschicktesten und zuverläßigsten scheinen, und so beschaffen sind, daß sich die Fehler so wenig als möglich häufen, sich auf die fernern Bestimmungen fortpflanzen, und am Ende eine sehr grosse Unrichtigkeit verursachen. Und so wird ein Feldmesser, der sonst auch nur mittelmäßige Werkzeuge braucht, oft was genaueres leisten, als ein anderer, der beym Gebrauch der besten Werkzeuge, aus Mangel nöthiger Kenntnisse, nicht die vortheilhaftesten Umstände auszuwählen weiß.

Aufgabe.

§. 209. In einem Dreyecke PQR, sind die beyden Seiten q, r, und der eingeschlossene Winkel P, etwas falsch gemessen worden, man verlangt, zu wissen, in wie ferne dadurch die Seite p unrichtig werde; oder wenn die Fehler der Grössen q, r, p, P, wie bisher mit dq, dr, dp, dP bezeichnet werden, die Gleichung zwischen dq, dr, dp, dP zu finden. Ich nehme übrigens die Werthe von dq, dr, dp, dP positiv an, dergestalt daß wenn q, r, p, P die wahren Grössen sind, q + dq, r + dr, u. s. w. die fehlerhaften vorstellen.

Aufl. Aus (§. 206. II) ist die Gleichung zwischen p, q, r, P folgende

$$p^2 = q^2 + r^2 - 2qr \cos P.$$

II. Man suche nun um wie viel sich jedes Glied dieser Gleichung verändert, wenn, p um dp, q um dq u. s. w. wachsen, und es ist klar, daß die Veränderung von p^2 gleich seyn müsse, der Summe der Veränderungen, der Glieder

$$q^2,\ r^2,\ -2qr \cos P.$$

III Wenn p um dp zunimmt, so wächst das Quadrat von p um 2pdp (Trig. S. XXXIV) oder es ist $d(p^2) = 2pdp$. Auf gleiche Weise ist $d(q^2) = 2qdq$; $d(r^2) = 2rdr$.

IV. Um zu finden, um wie viel sich das Produkt $2qr \cos P$ verändert, wenn q um dq, r um dr, P um dP zunehmen, so will ich der Kürze halber das Produkt $2qr \cos P = X$ setzen, und es kömt also darauf an, den Werth von dX zu finden.

Nun ist, wenn man auf beyden Seiten Logarithmen nimmt

$$l2 + lq + lr + l\cos P = lX$$

folglich aus (Trig. S. XLVI. XLVII. 2), und weil $d \log 2 = 0$ ist, indem sich die 2

nicht

nicht verändert, erhält man

$$\frac{dq}{q} + \frac{dr}{r} - dP \text{ tang } P = \frac{dX}{X}$$

oder auf beyden Seiten mit $X = 2qr \text{ cof } P$ multiplicirt

$$2r\,dq \text{ cof } P + 2q\,dr \text{ cof } P - 2qr\,dP \text{ fin } P = dX$$

V. Weil nun aus (I. II)

$d(p^2) = d(q^2) + d(r^2) - dX$ seyn muß.

so erhält man nach gehöriger Substitution der Werthe aus (III. IV.) folgende Gleichung

$$pdp = qdq + rdr - q \text{ cof } P\,dr - r \text{ cof } P\,dq + qr\,dP \text{ fin } P$$

welche sich in folgenden Ausdruck zusammen ziehet

$$pdp = (q - r \text{ cof } P)\,dq + (r - q \text{ cof } P)\,dr + qr \text{ fin } P\,.\,dP$$

VI. Diese Gleichung stellet also die Relation zwischen den Fehlern dp, dq, dr, dP, vor, und es erhellet, daß, wenn drey von diesen Fehlern gegeben sind, man den 4ten, welcher also die Folge der erstern drey darstellet, finden könne. Diese Gleichung ist aber nicht kurz genug, auch nicht geschickt, die Werthe von $\frac{dp}{p}$, $\frac{dq}{q}$ u. s. w. nemlich die Verhältnisse der Fehler zu ihren zugehörigen Grössen zu bestimmen. Aus dieser

Ursache wollen wir mit dieser Gleichung noch einige Veränderung vornehmen.

VII. Man stelle sich in dem Dreyecke PQR, von Q, R Perpendiculärlinien auf die gegenüberstehenden Seiten vor, so wird man aus denen daher rührenden rechtwinklichten Dreyecken gar leicht herleiten, daß

$q - r \cos P = p \cos R$ und $r - q \cos P = p \cos Q$ sey

diese Werthe also in (V) substituirt, geben

$$p\,dp = p \cos R\, dq + p \cos Q\, dr + qr \sin P\, dP.$$

oder durchgängig mit p^2 dividirt

$$\frac{dp}{p} = \frac{\cos R}{P} dq + \frac{\cos Q}{P} dr + \frac{q \cdot r}{P \cdot P} \sin P\, dP$$

oder

$$\frac{dp}{p} = \cos R \cdot \frac{q}{P} \cdot \frac{dq}{q} + \cos Q \cdot \frac{r}{P} \cdot \frac{dr}{r} + \frac{q}{P} \cdot \frac{r}{P} \sin P\, dP$$

Aber in dem Dreyecke PQR ist

$$\frac{q}{p} = \frac{\sin Q}{\sin P}; \quad \frac{r}{p} = \frac{\sin R}{\sin P}$$

(Weil sich die Seiten wie der gegenüberstehenden Winkel Sinusse verhalten)

Also

Also wird

$$\frac{dp}{p} = \frac{\sin Q \cos R}{\sin P} \cdot \frac{dq}{q} + \frac{\sin R \cos Q}{\sin P} \cdot \frac{dr}{r} + \frac{\sin Q \sin R}{\sin P} \cdot dP$$

Nennt man also die Factoren, womit $\frac{dq}{q}, \frac{dr}{r}$ dP, multipliret sind, A, B, C so wird

$$\frac{dp}{p} = A \cdot \frac{dq}{q} + B \cdot \frac{dr}{r} + C\,dP$$

welches die gesuchte Gleichung zwischen den Werthen von $\frac{dp}{p}, \frac{dq}{q}, \frac{dr}{r}$, dP ist. Statt dP muß man aber aus obigen Gründen eigentlich $\frac{dP}{206264}$ setzen, wenn dP in Sekunden gegeben ist.

Die Werthe von A, B, C sind nun bekante Grössen, weil man alle Winkel des Dreyecks PQR als gegeben ansehen kan, wenn q, r, P gegeben sind.

Für Seiten oder Winkel die zu klein gemessen worden, sind dp, dq, dr, dP negativ oder = 0 wenn die erwähnten Grössen richtig gemessen worden.

Einige Folgerungen.

§. 210. I. Wenn man mit Hrn. Marinoni (de re ichnograph. Lib. I. Cap. V. §. V. num. I.) annimmt, daß die Fehler in den gemessenen Linien, diesen Linien selbst proportional sind, wenn man also $q : r = dq : dr$ oder $\frac{dq}{q} = \frac{dr}{r}$ setzt,

so wird

$$\frac{dp}{P} = (A+B)\frac{dq}{q} + CdP \text{ aber}$$

$$A+B = \frac{\sin Q \cos R + \sin R \cos Q}{\sin P} = \frac{\sin (Q+R)}{\sin P}$$

$$= \frac{\sin P}{\sin P} = 1 \text{ folglich}$$

$$\frac{dp}{P} = \frac{dq}{q} + CdP$$

Unter dieser Voraussetzung des Herrn Marinoni, die sich durch die Erfahrung zu bestätigen scheinet, wird also die Formel (§. 209, VII) ungleich einfacher.

II. Ist übrigens auch der Winkel P richtig gemessen, folglich $dP = 0$, so ist blos

$$\frac{dp}{P} = \frac{dq}{q}$$

oder

oder $p : q = dp : dq$ folglich

$$p + dp : q + dq = p : q$$

oder die fehlerhaften Seiten verhalten sich wie die wahren. Eben dieses gielt auch in (1) wo man aus der Proportion $q : r = dq : dr$ schlieset

$$q + dq : r + dr = q : r$$

Man siehet also leicht, daß, wenn die Fehler der Seiten q, r, eines Dreyecks, in dem Verhältniß der Seiten selbst stehen, der eingeschlossene Winkel P aber keine Veränderung leidet, das fehlerhafte Dreyeck, dem wahren ähnlich seyn müsse.

IV. Andere Folgerungen in Absicht der Zeichen + oder — die man den Werthen von dq, dr, dP geben kan, sind eben so wie in vorhergehender Aufgabe anzustellen, und man wird mit geringer Mühe aus der allgemeinen Gleichung

$$\frac{dp}{P} = A\frac{dq}{q} + B\frac{dr}{r} + CdP$$

iede einzelne Fälle herleiten können wenn man sie nöthig hat, daher ich mich bey dieser Aufgabe nicht länger aufhalten will.

Aufgabe.

§. 211. In einem Dreyecke PQR, wo man zwischen den Grössen r, R, p, P, oder zween

Winkeln und den gegenüberstehenden Seiten, folgende Gleichung

$$p \sin R = r \sin P$$

hat, die Gleichung zwischen den Fehlern dp, dr, dR, dP zu finden.

Aufl. Man könte hier eben wie in der erstern Aufgabe verfahren, und untersuchen, um wie viel die beyden Produkte p sin R, r sin P sich verändern, wenn p um dp, R um dR u. s. w. sich verändert; alsdann die Aenderungen der beyden Produkte einander gleich setzen.

Hier kan man aber durch Logarithmen kürzer so verfahren.

$$\text{Weil } l\,p + l \sin R = l\,r + l \sin P$$

$$\text{so wird } \frac{dp}{p} + dR \cot R = \frac{dr}{r} + dP \cot P$$

welches die gesuchte Gleichung zwischen den Fehlern ist.

Anmerkung.

§. 212. Das bisherige mag zureichen in Dreyecken, die Verhältnisse zwischen den Fehlern der Seiten und Winkel, zu finden, und die beygebrachten drey Aufgaben, werden die gewöhnlichsten Fälle in sich enthalten, die beym Feldmessen vorkommen;

Man

Man wird auch nun leicht begreifen, wie die Berechnung der Fehler und ihrer Folgen in zusammengesetztern Fällen, sich auf die einfachern bisher beygebrachten Fälle gründen. Um hievon nur ohngefähr ein Beyspiel beyzubringen, so will ich annehmen, man suche z. B. nach der Aufgabe §. 184 die Weite AB, aus CD und denen an der Standlinie CD gemessenen Winkeln. Um nun den Einfluß zu finden, den die Fehler in Messung der erwähnten Winkel, auf die gesuchte Weite AB haben, so würde man etwa auf folgende Art verfahren;

Ich würde 1) den Fehler berechnen, welcher aus den unrichtig gemessenen Winkeln ACD, ADC, auf die Seite AC des Dreyecks ACD erfolgte. Man siehet leicht, daß dieses nach der Auflösung des 207 §. geschehen könne. Auf diese Art fände ich also den Werth von $\frac{dAC}{AC}$ wo dAC den Fehler der Seite AC und der Quotiente $\frac{dAC}{AC}$ wie bekant, das Verhältniß des Fehlers zur zugehörigen Grösse ausdrückt.

2) Auf eben die Art würde ich in dem Dreyecke BCD, aus den falsch gemessenen Winkeln BCD, BDC, den Fehler der Seite BC oder den Werth von $\frac{dBC}{BC}$ berechnen.

3) Würde ich endlich in dem Dreyecke ACB, wo mir die Fehler $\frac{dAC}{AC}$, $\frac{dCB}{CB}$, der beyden Seiten AC, BC, und der Fehler des eingeschlossenen gemessenen Winkels ACB bekannt sind, den Fehler der dritten Seite AB oder den Werth von $\frac{dAB}{AB}$ nach der Aufgabe des 209 §. finden.

Man dürfte nemlich in der Auflösung des 209 §. statt der Werthe $\frac{dq}{q}$, $\frac{dr}{r}$ nur die gefundenen $\frac{dAC}{AC}$, $\frac{dCB}{CB}$, und statt dP den Fehler des Winkels ACB substituiren, so erhielte man den Werth von $\frac{dp}{p}$ oder hier von $\frac{dAB}{AB}$, also die Unrichtigkeit der gesuchten Weite AB.

Man wird leicht begreifen, daß bey würklicher Anwendung, diese Rechnung etwas weitläuftig ausfallen wird.

Man kan sich aber unterschiedene Vortheile dabey machen. Um nur einen zu erwähnen: Weil man in dem Dreyecke ACB, zur Berechnung des Fehlers der Seite AB, die beyden Winkel CAB, CBA wissen muß, so kan man

die-

dieselben bloß, nachdem man sich die ganze Figur ABCD, nach einem verjüngten Maaßstabe, vermöge der an der gemessenenen Grundlinie CD bekannten Winkel, entworfen hat, durch einen Transporteur messen. Ob man dadurch freylich diese Winkel nicht so genau, als durch Rechnung findet, so schadet es doch nichts, bey Berechnung des Fehlers in der Weite AB; man mache den Versuch, und nehme in der Formel des §. 209 VIII, die Winkel Q, R, etwas grösser oder kleiner als sie würklich sind, so wird dieses auf Bestimmung des Werthes von $\frac{dp}{p}$ keinen sonderlichen Einfluß haben.

Man könte den Fehler in der Weite AB noch auf eine andere Art finden, nemlich daß man, die Formel suchte, wodurch AB, durch die Standlinie CD, und den Winkeln an der Standlinie bestimmt wird, und hierauf wie bey den Dreyecken gewiesen worden, auf eine ähnliche Art, die Veränderungen dieser Formel untersuchte, welche aus den fehlerhaft gemessenen Grössen entständen; allein die Rechnung wird doch noch immer weitläuftig bleiben, weil die Formel wodurch AB bestimmt wird, sich nicht auf einen einfachen und kurzen Ausdruck bringen läst.

In Fällen, wo die unbekante Grösse durch eine bequeme Formel ausgedrückt werden kan,

läst sich die Berechnung der Folgen der Fehler gleichfalls ohne Schwürigkeit bewerkstelligen, wie folgende beyden Beyspiele, die ich, um die Theorie davon noch etwas vollständiger zu zeigen, noch beybringen will, ausweisen.

Beyspiele, die Folgen der Fehler in zusammengesetzten Fällen zu berechnen.

§. 213. I. Wir haben bey der Aufgabe des 191 §. folgende Gleichung für die Höhe Kw die wir x nennen wollen, gefunden

$$x = \frac{b \sin \beta \sin \alpha}{\sin(\alpha - \beta)}$$

Es frägt sich, wenn b, β, α, um db, $d\beta$, $d\alpha$, falsch gemessen worden, wie unrichtig man dadurch den Werth von x findet.

Weil die Formel für x sich hier bequem durch Logarithmen in einzelne Theile zerlegen läst, indem

$$lx = lb + l\sin\beta + l\sin\alpha - l\sin(\alpha - \beta)$$ ist

so darf man nur die Veränderuug eines jeden einzeln Theiles dieser Formel suchen, und die Veränderungen die auf beyden Seiten dieser Gleichung herauskommen, wieder in eine Gleichung bringen, so wird man das Verhältniß zwischen den Fehlern, oder den Grössen dx, db, $d\beta$, $d\alpha$, finden.

Weil

Weil also

$$d\log x = d\log b + d\,l\sin\beta + d\,l\,l\alpha - d\,l\,l(\alpha-\beta)$$

ist so erhält man aus den obigen beygebrachten Trig. Sätz. XLVI. XLVII

$$\frac{dx}{x} = \frac{db}{b} + d\beta\cot\beta + d\alpha\cot\alpha - (d\alpha - d\beta)\cot(\alpha-\beta)$$

oder wenn man der Kürze halber

$\cot(\alpha-\beta)+\cot\beta = M$; $\cot\alpha - \cot(\alpha-\beta) = N$

setzet, so wird

$$\frac{dx}{x} = \frac{db}{b} + M\,d\beta + N\,d\alpha$$

welches die gesuchte Gleichung ist, und die Unrichtigkeit in der Höhe x bestimmt.

II. Für die Aufgabe des 194 §. erhielten wir folgende Gleichung $KI = \frac{a\sin\gamma\,\mathrm{tang}\,\alpha}{\sin(180^\circ-\beta-\gamma)}$.

Um wie viel wird sich die Höhe KI ändern, wenn die Grössen a, γ, α, β um da, $d\gamma$, $d\alpha$, $d\beta$ falsch gemessen worden?

Hier läst sich durch Logarithmen, die Formel wieder bequem in einzelne Theile zerlegen

$$lKI = l\,a + l\sin\gamma + l\,\mathrm{tang}\,\alpha - l\sin(180^\circ-\beta-\gamma)$$

oder

$$lKI = l\,a + l\sin\gamma + l\,\mathrm{tang}\,\alpha - l\sin(\beta+\gamma)$$

daher

daher wird nach Trig. S. XLVI. XLVII.

$$\frac{dKI}{KI} = \frac{da}{a} + d\gamma \cot \gamma + \frac{2\, d\alpha}{\sin 2\alpha} - (d\beta + d\gamma)\cot(\beta+\gamma)$$

oder wenn ich der Kürze halber

$$\cot(\beta+\gamma) = M;\ \frac{2}{\sin 2\alpha} \text{ oder}$$

$$2 \operatorname{cosec} 2\alpha = N,\ \cot\gamma - \cot(\beta+\gamma) = L$$

setze so ist

$$\frac{dKI}{KI} = \frac{da}{a} + L\,d\gamma + N\,d\alpha - M\,d\beta$$

welches die gesuchte Gleichung zwischen den Fehlern ist.

Aus dieser Formel wird sich leicht herleiten lassen, daß, je kleiner der Winkel α, und die Standlinie a ist, desto grösser die Unrichtigkeit in der Höhe KI sey, weil der Quotiente $\frac{dKI}{KI}$ unter solchen Umständen wächst.

Es ist daher nicht vortheilhaft aus sehr entfernten Standpunkten, Höhen zu messen, weil alsdann gewöhnlich der Winkel α sowohl, als auch die Standlinie a nicht von gehöriger Grösse genommen werden können.

Mehr Exempel beyzubringen würde unnöthig seyn.

Man

Man wird aus dem bisherigen zureichend einsehen, worauf sich die Berechnung der Fehlergründe, und wenn man sich in denen zu Anfange dieses Buches gegebenen Formeln, für die Veränderungen der Produkte, Quotienten u. s. w. einigermaaßen geübt hat, so wird man gar leicht in allen Fällen die Berechnung der Fehler und ihrer Folgen anstellen können. Diejenigen Fälle, die aber in der Ausübung am meisten vorkommen, sind in den Aufgaben dieses Kapitels enthalten.

Auf den Formeln §.207. u. f. gründen sich nun auch die von verschiedenen Schriftstellern angegebenen Regeln von Auswahl der Standlinien; was davon in der Ausübung vorzüglich brauchbar ist habe ich theils schon beygebracht, theils werde ich auch in der Folge noch etwas davon reden. Die meisten Vorschriften, die aber von Auswahl der Standlinien in zusammengesetzten Fällen, von diesen Schriftstellern beygebracht worden, sind so verwickelt und eingeschränkt, daß meines Erachtens die Ausübung keine beträchtlichen Vortheile davon zu erwarten hat. Auch ist die Theorie davon in der That ziemlichen Schwürigkeiten unterworfen, und führt auf Rechnungen und Constructionen, die auch den arbeitsamsten Feldmesser ermüden würden. Man sehe nur was Herr Lambert (Beyträge z. pract. Geometrie §. 418, 420) hievon erwähnt. Und

wenn

wenn ich nun auch annehme, daß man nach der Theorie für die Entwerfung einer gewissen Menge von Objekten die geschickteste Standlinie ausgefunden hat, wird man sie auch immer auf dem Felde so annehmen können, wie sie der Theorie nach liegen solte? Wird man aus ihr auch alle Punkte sehen können, die man entwerfen will? Andererer Hinderniße zu geschweigen. Und da überhaupt, die Auswahl der besten Standlinie auf dem Felde selten in des Feldmessers Gewalt stehet, so wird er oft Standpunkte wählen müssen, die zwar der Theorie nach nicht die vortheilhaftesten sind, die aber doch noch immer eine erträgliche Lage haben, und sich durch andere Umstände, z. E. durch ihre Bequemlichkeit, durch die Aussicht die man an ihnen haben kan u. s. w vorzüglich empfehlen. Und solche Standlinien auszufinden braucht man keine weitläuftigen Rechnungen, sondern nur einige Kenntniß der Gegend, und einen vorläufigen, auch nur mäßig richtigen, etwa nach dem Augenmaaße, oder sonst auf eine andere Art entworfenen Grundriß, dergleichen man doch immer, wo man genauere Vermessungen anstellen will, bey Privatpersonen oder sonst irgendwo erhalten kan. Da ferner eine einzige Standlinie selten zureichet, eine gewisse Anzahl von Oertern richtig aufzunehmen, so kan man aus neuen Standlinien theils diejenigen Punkte, die man aus der erstern Standlinie erhalten hat, berichtigen,

theils

theils auch diejenigen Oerter aufnehmen, gegen die, die erste Standlinie eine zu ungeschickte Lage hatte. Und so wird man immer durch den Gebrauch mehrerer Standlinien, alle nöthige Genauigkeit erhalten.

Wer übrigens von Auswahl der Standlinien, und überhaupt von der bisherigen Theorie, außer den bisher angeführten Schriften des Hrn. Marinoni und Lamberts, noch mehreres nachlesen will, dem können noch folgende Schriftsteller dienen.

Wolfii Elem. Trigonom. latinae. §. 58. seq.

Bouguer Figure de la Terre Sect. II. art. 3.

Hrn. Hofr. Kästners Abhandl. von den Fehlern beym Feldmessen welche man in den Abh. der Königl. Schwed. Ac. d. Wiss. fürs Jahr 1753. findet und Hrn. Bar. Fried Palmquists dahin gehöriger Aufsatz in den Abh. der K. Schwed. Ac. fürs Jahr 1768. (nach der Kästn. Uebers.)

Karl Scherfers Trigon. Versuch von der Wahl des Standes beym Feldmessen (Wien 1766)

XVIII.

XVIII. Kapitel.

Von den brauchbarsten Methoden Figuren jeder Gattung auf dem Felde zu Papiere zu bringen, oder in Grund zu legen.

§. 114. Die gegenwärtigen Aufgaben, mit ihren Zusätzen, betreffen diejenigen Methoden, Figuren einander ähnlich zu machen, welche auf dem Felde vorzüglich gebraucht werden können, und in denen sich Anfänger vorher zulänglich üben müssen, ehe sie sich wagen dürfen, ganze Fluren zu entwerfen. Die Anwendung davon auf die Vermessung ganzer Landschaften, werde ich aber in der Folge mit mehrerem zeigen, weil ich dabey noch vieles anzumerken habe, das den Vortrag des gegenwärtigen Kapitels, wo ich bloß die Gründe zur Vermessung ganzer Landschaften vortrage, zu sehr unterbrechen würde.

Aufgabe.

§. 215. Eine Figur auf dem Felde, die in einer Horizontalebene liegt, und deren Seitenlinien gerade sind, vermittelst der Meßkette zu entwerfen;

Aufl. Es seyen Fig. LXVII A, B, C, D, E eine gewisse Anzahl von Gegenständen oder Punkten auf dem Felde, man soll auf dem Papiere, Punkte verzeichnen, die gegeneinander eben die Lage haben, wie die auf dem Felde.

II. Es erhellet, daß dieses geschehen würde, wenn man sich durch die Punkte A, B, C, D, E auf dem Felde gerade Linien dergestalt gezogen vorstellet, daß dadurch eine gewisse Figur ABCDE entstehet, und dann auf dem Papiere eine kleinere Figur abcde entwirft die der ABCDE ähnlich ist. Dann werden nemlich die Winkelpunkte a, b, c, d, e auf dem Papiere eben die Lage gegen einander haben, welche A, B, C, D, E auf dem Felde gegen einander haben.

III. Um nun diese Figur abcde auf dem Papiere verzeichnen zu können. so müssen an der Figur auf dem Felde so viel Dinge gemessen werden, als nöthig sind, diese Figur zu bestimmen.

IV. Da wir nun bloß mit der Meßkette dieses leisten wollen, so erhellet aus der bekanten Lehre von der Aehnlichkeit der Figuren, daß es nicht zureichend sey, bloß die Linien AB, BC, CD, ED, AE, am Umkreise der Figur zu messen, sondern daß man noch andere Stücke messen müsse, wodurch die Lage dieser Linien AB, BC, u. s. w. gegen einander bestimmt wird.

V. Hierzu nimt man nun sehr bequem, die Diagonallinien dieser Figur z. E. BE, BD; welche die ganze eingebildete Figur in zusammenhängende Dreyecke ABE, EBD, BDC zerlegen. Wan pflegt diese Diagonallinien aus einem solchen Punkte der Figur ausgehen zu lassen, den man in jedem Falle am bequemsten findet, und wodurch die wenigsten stumpfwinklichten Dreyecke entstehen, welches man gar leicht nach dem Augenmaaße beurtheilen wird.

VI. Nun ist klar, daß, wenn man auf dem Papiere 1) kleinere Dreyecke abe, ebd, bcd, verzeichnet, die denen größern ABE, EBD, BCD ähnlich sind 2) dieselben in eben der Ordnung mit einander verbindet, wie sie auf dem Felde mit einander verbunden sind, man alsdann eine kleinere Figur abcde erhalten werde, die der grossen ABCDE ähnlich ist.

VII. Man messe nun mit der Meßkette, nach der Ordnung erstlich alle 5 Seiten der Figur ABCDE; und wenn bey diesen Messungen Hindernisse vorkommen solten, daß sich eine oder die andere Seite nicht durch würkliche Anlegung der Meßkette messen lässet, so bediene man sich der Hülfsmittel, die wir im XV Kapitel §. 178 bis 181 beschrieben haben.

VIII. Demnächst messe man alle Diagonallinien, welche aus einem angenommenen Punkte B, nach allen Eckpunkten der Figur hingehen können. Bey einem Fünfecke, wie hier angenommen worden, giebt es nur zwo Diagonalen, BE, BD, bey einem Sechsecke drey, bey einem Siebenecke vier u. s. w.

IX. So werden diese Bestimmungen (VII. VIII) zureichen, die Figur ABCDE zu entwerfen.

Damit aber zu Hause beym Auftragen keine Verwirrung entstehe, so muß man entweder sich auf dem Felde ein Brouillon, d h. einen Entwurf aus freyer Hand von der Figur ABCDE, auf einem Blatt Papier gemacht haben, wo man demnächst an die entsprechenden Seiten und Diagonalen, die gefundenen Maaße schreibt, oder man muß, welches noch besser ist, auf folgende Art zu Werke gehen.

Es müssen in die Winkelpunkte A, B, C, D, E, Zeichenstäbgen mit Nummern gesteckt werden, dergestalt, daß z. E. bey A wo man die Messung anfangen will, die 1ste Nummer, alsdann an den nächstfolgenden Punkt B, die 2te Nummer, an C die 3te u. s. w. zu stehen komme. Alsdann werden nach der Ordnung der Nummern, die Seiten AB, BC, u. s. w. ge-

messen, und die gefundenen Maaße auf folgende Art ins Diarium getragen.

Für die Seiten der Figur.	Ruth. Fusse. Zolle
Die Weite von Nro. 1 bis N 2	28 . 7 . 3
von N 2 — N 3	35 . 8 . 2
. N 3 — N 4	34 . 5 . 6
. N 4 — N 5	32 . 0 . 8
. N 5 — N 1	36 . 9 . 4
Für die Diagonallinien	
Die Diagon. von N. 2 bis N 4	48 . 0 . 0
. N 2 — N 5	52 . 9 . 3

Wenn man solchergestalt die Messungen gehörig aufzeichnet, so kan demnächst zu Hause beym Auftragen nicht die geringste Schwürigkeit entstehen. Man kan auch, wenn es nöthig ist, andere Umstände z. E. die Nahmen der Objekte A, B, C u. s. w. in dem Diario anmerken, ob sie Gränzsteine, Bäume, Ecken von Gebäuden u. d. g. bedeuten.

X. Will man nun zu Hause die Figur zu Papiere bringen, so ist folgendes dabey zu bemerken.

Erstlich

Erstlich verzeichnet man sich, wenn man im Auftragen der Figuren aus dem Diario noch keine Fertigkeit hat, einen groben Entwurf, oder eine Figur auf ein Blatt Papier, von so viel Seiten, als die Figur auf dem Felde hat, und bemerket die Ecken derselben auf eben die Art wie auf dem Felde, mit den dabey geschriebenen Zifern 1, 2, 3 u. s. w. Diese grobe und aus freyer Hand entworfene Figur, dienet nur, um der Einbildungskraft zu Hülfe zu kommen, und desto bequemer übersehen zu können, wie die Dreyecke gehörig auf einander folgen, und die Seiten derselben aufgetragen werden müssen.

Hierauf wird auf ein Reißbrett Papier gespannet, und auf demselben demnächst, die gerade Linie ab gezogen, worauf man von a bis b, aus dem Diario die Weite von N 1 bis N 2 träget, und bey den Punkten a, b, ebenfalls die Zahlen 1, 2 hinschreibet.

Nun nehme man aus dem Diario die Weiten von N 1 bis N 5, und die Diagonale von N 2 bis N 5, und beschreibe mit denselben, über der Seite ab, das Dreyeck abe, so daß ae der Weite von N 1 bis N 5, und be der erwähnten Diagonale gewäß wird; so ist das Dreyeck abe dem Dreyecke ABE ähnlich. Bey den Punkt e wird demnächst die Zahl 5 gesetzt.

Ueber der Diagonale be, wird nun das zweyte Dreyeck auf eben die vorhin gewiesene Art beschrieben, indem man aus b mit der Weite bd die der Diagonale von N 2 bis N 4, und aus e mit der Weite ed die der von N 5 bis N 4, gleich ist, ein paar sich in d durchschneidende Kreisbogen beschreibt.

So wird also über jeder neuen Diagonale, das nächstfolgende Dreyeck beschrieben, bis die ganze Figur abcde geschlossen ist, welche alsdann der auf dem Felde ähnlich seyn wird, weil die Dreyecke abe u. s. w. in eben der Ordnung, auf einander folgen, wie die Dreyecke ABE u. s. w. auf dem Felde, und jedes auf dem Papiere dem zugehörigen auf dem Felde ähnlich ist.

Daher ist also abcde ein Grundriß von ABCDE, und die Punkte a, b, c, d, e, liegen eben so gegen einander wie die Punkte A, B, C, D, E, auf dem Felde.

XI. Dieses Verfahren nennet man, die Messung einer Figur bloß mit der Meßkette, und ein kleines Nachdenken wird zeigen, daß zwar diese Messungsart eine große Genauigkeit verstattet, aber nur in solchen Fällen brauchbar sey, wo die zu entwerfende Figur, erstlich in einer Ebene liegt, und zweitens nicht von gar zu großen Umfange ist. — Denn im entgegengesetzten Falle erfordert die Messung der

vie-

vielen Linien, einen sehr großen Zeitverlust, besonders, wenn sich viele Hindernisse, in Messung der Seiten und Diagonalen vorfinden solten. Man pflegt daher diese Messungsart, meistens nur bey Grundlegung nicht sehr großer Wiesenstücke, bey Vermessungen der Aeker u. s. w. zu gebrauchen. Uebrigens erhellet, daß diese Methode voraussetzet, daß man die Diagonalen ohne sonderliche Hindernisse messen, und übersehen könne. Es würde daher, wenn ABCDE, z. E. den Umkreiß eines Waldes vorstellte, diese Messungsart unnütz seyn, weil die Messung der Diagonalen ohne großen Nachtheil und Zeitverlust schwerlich vorgenommen werden könnte.

XII. Wenn eine Figur aus sehr vielen Seiten bestehet, so ist es gut, dieselbe in Vielecke von einer geringern Anzahl Seiten zu zerlegen, jedes nach dem gewiesenen Verfahren zu vermessen, und sie alsdann auf dem Papiere in eben der Ordnung an einander zu hängen. Man muß aber von den Seiten und Diagonalen eines jeden einzeln Vielecks ein besonders Diarium halten. Auch verstehet es sich von selbst, daß man, ehe die Messung angefangen wird, vorher die ganze Figur umgehe, sich einen deutlichen Begrif von ihr mache, und wenn man es nöthig befindet, die kleinern Stücke in die man die große Figur zerlegt, durch eingeschlagene Pfähle oder Fahnen u. s. w. bezeichne. Und überhaupt muß man aufs möglichste sich aller

Ordnung befleißigen, und alle Umstände in Erwägung ziehen, die entweder die Arbeit verzögern oder wohl gar unnütz machen könten. Auch ist es vortheilhaft, die gemessene Figur, so bald als möglich, zu Hause aufs Papier zu tragen, weil die Umstände der Vermessung dem Feldmesser noch deutlich vor Augen sind, und verschiedene Verwirrungen vermieden werden, die sonst gar zu leicht, aus weitläuftigen Diariis entstehen können.

Die Grösse des verjüngten Maaßstabes, den man zum Auftragen braucht, beurtheilt man nach der jedesmaligen Absicht, und der Grösse des zu verfertigenden Risses.

Anmerkung.

§ 216. Wir haben uns die Figur auf dem Felde durch Diagonalen in Dreyecke zerlegt vorgestellet; ein kleines Nachdenken wird zeigen, daß, wenn es bequemer ist die Figur auf eine andere Art, in zusammenhängende Dreyecke zu zerlegen, man solche dem Gebrauch der Diagonalen vorziehet. So z. E. könte man auch innerhalb der Figur einen willkürlichen Punkt annehmen, und sich von demselben nach allen Eckpunkten der Figur, gerade Linien gezogen vorstellen; dann würde die ganze Figur gleichfalls in zusammenhängende Dreyecke zerlegt, und wenn man alle

Seiten

Seiten am Umfange der Figur, wie auch alle Linien die von dem innerhalb der Figur angenommenen Punkte nach allen Ecken hinlaufen, mäße, so würde man daraus alle Dreyecke verzeichnen, und sie in eben der Ordnung gegen einander legen können, wie sie auf dem Felde auf einander folgen, man würde also dadurch gleichfalls den Grundriß der Figur auf dem Felde, erhalten.

Diese Methode ist oft noch nützlicher, als der Gebrauch der Diagonalen, ob man gleich einige Linien mehr messen muß. Denn die Diagonalen werden oft zu lang und unbequem zu messen.

Aufgabe.

§ 217 **Wenn man gleich keine Diagonalen, oder Linien wie in §. 216 messen kan, die Figur demohnerachtet bloß durch Hülfe der Maaßstäbe und der Meßkette zu Papiere zu bringen, vorausgesetzt daß die Figur in einer Ebene liege.** (Fig. XLVIII.)

Aufl. I. In diesem Falle muß man die Winkel am Umkreise der Figur messen; dieses nun bloß mit der Meßkette zu bewerkstelligen, so bedienen sich einige Schriftsteller der (§. 138 III) beschriebenen Methode, Winkel zu messen; da ich das wesentliche davon a. a. O. bereits erklärt habe, so brauche ich nur ganz kurz noch folgende Errinnerungen beyzufügen.

II. Erstlich muß man ein Diarium halten, worin man die für jeden Winkel A, B, C, D, E, der zu entwerfenden Figur, nöthigen Bestimmungen gehörig aufzeichnet.

Diese Bestimmungen bestehen, wie aus a. a. O. erhellet, in kleinen gleichschenklichten Dreyecken wie z. E. Abc, wo man in den Richtungen AB, AE, von A nach b, und von A nach e gleiche Längen nimmt, und demnächst die Chorde be misset; ein gleiches geschiehet an jedem Winkel des Umkreises, wie die Figur ausweiset.

Es müssen aber diese Linien Ab = Ae, Eβ = Eε u. s. w. wenigstens einige Ruthen lang gemacht werden.

In dem Diario muß man nun nicht allein, die Länge der beyden gleichen Schenkel Ab, Ae, u. s. w. an jedem Winkel anmerken, sondern auch die gefundene Länge der Chorden be, βε u. s. w. Gehet es aber an, an jedem Winkel durchgehends gleiche Schenkel Ab = Ae = Eβ = Eε u. s. w. zu nehmen, so braucht man nur bey jedem Winkel die Chorden be, βε, anzumerken; nur muß man nicht vergessen, die ein für allemal gebrauchte Länge der Schenkel Ab, Eβ u. s. w. irgendwo auch in dem Diario aufzuzeichnen.

III. Wenn man die Chorden nicht innerhalb der Figur, wie bey A, E, messen kan, so muß man sie ausserhalb der Figur bestimmen, wie solches z. B.

bey

bey dem Winkel D gewiesen worden, wo man in den Verlängerungen, von CD, ED, gleiche Längen Dn, Dm nimmt, und die Chorde mn misset.

IV. Zugleich muß man in dem Diario anmerken, ob die Winkel A, B, C, D, E, auswärts oder einwärts gehende Winkel sind, wozu man willkürliche Zeichen z. E. die Buchstaben A, E, wählen kan. So müste man z E. bey dem Winkel C anmerken, daß es ein auswärts gehender ist.

V. Nun müssen auch alle Seiten AB, BC u. s. w. am Umkrise der Figur gemessen, und wie gehörig ins Diarium getragen werden.

VI. Wenn man alle Seiten der Figur misset, so lehret die Geometrie, daß man nicht nöthig habe, auch alle Winkel am Umkreise zu bestimmen, sondern 3 Winkel weniger als die Figur Seiten hat; nur müssen die Winkel in einer Ordnung auf einander folgen. So würde man z. E. in dem Fünfecke ABCDE, nur nöthig haben, alle Seiten, und die zween Winkel E, D zu messen, und die Figur würde dadurch doch vollkommen bestimmt seyn. Auf gleiche Weise, wenn man alle Winkel misset, so hat man nicht nöthig auch alle Seiten zu messen, sondern zwo weniger, als überhaupt am Umkreise vorkommen. So z. E. würde unser Fünfeck bestimmt seyn, wenn man nur die Winkel, A, E, D, C, B, und

die

die Seiten AE, ED, DC mäße; der Punkt B, folglich die Seiten AB, CB, bestimmen sich, vermittelst des Durchschnittes der verlängerten Schenkel Ab, Ci von selbst.

VII. Das Diarium würde nun z. E. auf folgende Art aussehen.

Für das Fünfeck ABCDE

a) Die Winkel desselben

	Schenkel			Chorden		
	Ruth.	F.	Z.	Ruth.	F.	Z.
der Winkel bey N 1.	2	0	0	2	1	3. E
N 2.	3	0	0	5	3	0. E
N 3.	2	0	0	1	8	2. E
N 4.	2	0	0	3	5	0. A

b) Für die Seiten desselben

	R.	F.	Z.
Weite von N 1-N 2.	12	0	0
N 2. N 3.	7	2	4
N 3. N 4.	7	7	4

VIII. Wenn nun nach diesen Datis die Figur zu Papiere gebracht werden soll, so verfährt man so.

Die Figur AEDCB bedeute nicht mehr die Figur auf dem Felde sondern deren Grundriß

auf dem Papiere. Um diese Figur nach den Angaben des Diarii gehörig zu verzeichnen, so ziehe man auf dem Papiere eine gerade Linie AE, und trage auf dieselbe, die Weite von Nro. 1 bis N 2, mache also nach dem Diario AE = 12 Ruth.

Von A nach e trage man den zum Winkel bey N 1 gehörigen Schenkel, nehme also Ae = 2 Ruthen, und beschreibe damit einen Kreisbogen ebq, trage in denselben von e nach b die dem Winkel bey N 1 zugehörige Chorde; also eb = 2 R. 1 F. 3 Z. ziehe durch A, b, eine gerade Linie so hat man auf dem Papiere den Winkel welchen man bey N 1 auf dem Felde hatte.

Auf gleiche Weise setzet man an E, den bey N 2 gefundenen Winkel, verlängere Eε, und nehme ED der Weite von N 2 bis N 3 gleich, so hat man den Punkt D;

Auf diese Art verfähret man immer fort, so werden endlich die beyden Linien AB, CB, sich bey 5 durchschneiden und solchergestalt die ganze Figur schliessen.

IX. Dieses Verfahren, eine Figur auf dem Felde gleichfalls bloß durch Ketten und Stäbe zu vermessen, ist freylich allgemeiner als das vorhergehende §. 215 aber bey weiten nicht so richtig, weil die Bestimmung der Winkel durch ihre Chorden, oft zu ziemlich beträchtlichen

Feh-

Fehlern Gelegenheit geben kan, besonders wenn gar zu spitze oder stumpfe Winkel vorkommen, und bey der Verzeichnung auf dem Papiere hat man Ursache, die Linien und Punkte so zart als möglich zu machen.

Indessen kan man sich doch in manchen Fällen dieser Methode mit Vortheil bedienen, und empfiehlt sich, wegen der geringen Kosten, indem man keine kostbaren Werkzeuge dazu braucht.

Noch eine nöthige Erinnerung wegen Verzeichnung der Winkel.

Um die Winkel A, E u. s. w. recht genau zu erhalten so darf man sich dazu nicht des verjüngten Maaßstabes bedienen, womit man die Seiten AE, ED u. s. w. abträgt. — Denn dieser Maaßstab wird gewöhnlich zu klein seyn; man muß daher für die Schenkel und Chorden der Winkel einen eigenen etwas großen Maaßstab verfertigen, damit die Chorden, so genau als sie das Diarium angiebt, abgetragen werden können. Ist aber der Maaßstab für die Seiten der Figur groß genug, daß man auch Zolle darauf hat, so mag man sich auch desselben zur Verzeichnung der Winkel bedienen.

Aufgabe.

§. 218. Eine krumlinigte Figus αβγδ Fig. LXIX. bloß durch Hülfe der Meßkette und Maaßstabe zu vermessen, und zu Papiere zu bringen.

Aufl. Man umschließe die krumlinigte Figur mit einer geradelinigten ABCD, indem man bey A, B, C, D Stäbe oder Nummern absteckt, und bestimme nach den beyden vorhergehenden Aufgaben an der geradelinigten Figur so viel Stücke, als nöthig sind, sie aufs Papier tragen zu können. Es müssen aber alle Seiten AB, BC, CD, DA, mit unter dieser Bestimmung seyn.

Während daß man nun die Seiten AB, BC, CD, DA misset, so messe man auch mit dem Maaßstabe, für die merklichsten Buchten und Wendungen, die Abscissen Aa, Ab u. s. w. und die zugehörigen Ordinaten aα, bβ, u. s. w. wie durch die punctirten Linien ringsherum angedeutet worden. Alle hieher gehörigen Vorschriften sind bereits im IV. Kap. §. 54 u. f. beygebracht. Ich habe also weiter nichts mehr zu errinnern, als daß man, nachdem nach Angabe des Diarii, die Figur ABCD, auf dem Papiere verzeichnet worden, auf die Seiten AB, BC u. s. w. die Abscissen trägt, und durch ihre Endpunkte die Maaßen der Ordinaten setzet, hierauf durch

die

die Endpuncte der Ordinaten rings herum eine krumme Linie αβγδε ziehet. Diese wird alsdann eine begränzte krumlinigte Figur bilden, welche der auf dem Felde desto ähnlicher seyn wird, je mehr Punkte durch Abscissen und Ordinaten bestimmt worden.

Bey diesem Verfahren ist übrigens noch zu bemerken daß man gerne die geradelinigte Figur ABCD, so nahe neben der krumlinigten hernimmt, als es angehet, damit die Ordinaten nicht zu groß werden. Solte aber dadurch die geradlinigte Figur zu viel Seiten bekommen, so muß man, um die daher entstehende Unbequemlichkeit zu vermeiden, freylich der Figur weniger Seiten geben, aber alsdann auch die daher rührenden grössern Ordinaten mit desto mehrerer Sorgfalt bestimmen und messen.

Wie man sich eben dieser Methode mit Vortheil bedienen könne, geradelinigte Figuren von sehr vielen Seiten, zu entwerfen.

§. 219. Wenn wir uns der im 217 u. 218 §. gewiesenen Methode bey sehr vielseitigen Polygonen bedienenwollen, so werden wir auch eine sehr große Anzahl von Dreyecken erhalten, in die wir die Figur zerlegen; man kan aber oft weit kürzer zum Endzweck gelangen, wenn man eine

Figur

Figur von sehr vielen, besonders kleinen Seiten, in eine andere von weniger Seiten einschließet, wie z. E. Fig. LXX ausweiset, wo wir die Figur abcdefgh, mit der viereckigten ABCD umschlossen haben Wenn man nun bloß diese viereckigte Figur zu Papiere bringet, und dann die auf dem Felde gemessenen Abscissen $A\alpha$, $A\beta$, $A\gamma$, $B\varepsilon$ u. s. w. nebst die denen Winkelpunkten a, b, c u. s. w. zugehörigen Ordinaten αa, βb, γc, εd u. s. w. gehörig absetzet, so wird man auf dem Papiere gleichfalls die Lage der Winkelpunkte a, b, c, d, e gegen die Seitenlinien des Vierecks bestimmen, und folglich die vielseitige Figur auf dem Papiere entwerfen; und so ist begreiflich daß man eine große Anzahl von Dreyecken ersparet, in die man sonst die vielseitige Figur zerlegen müste. Zur Bestimmung des Vierecks ABCD, haben wir hingegen nur zwey Dreyecke nöthig und die Messung der Abscissen und Ordinaten, erhält man zugleich, während man die vier Seiten AB, BC, CD, AD misset.

Es ist nicht nöthig daß die Viereckigte Figur ausserhalb der abcdefgh fällt; man kan, wenn man es bequemer findet, dieselbe auch innerhalb des vielseitigens Polygons annehmen, wie es z. B. die LXXI Figur ausweiset.

Aufgabe.

§. 220. Vermittelst des Meßtisches eine Figur zu Papiere zu bringen, wenn man

von einem Punkte innerhalb der Figur nach allen Ecken derselben hinmessen kan.

Aufl. I. Es sey Fig. LXXII; ABCDE die zu entwerfende Figur, und o der innerhalb ABCDE willkürlich angenommene Standpunkt.

II. Man messe, von o nach allen Ecken der Figur, in die man Stäbe mit Nummern gesetzet hat, die Entfernungen oA, oB, oC, oD, oE.

III. Man bringe hierauf den Meßtisch, über den Standpunkt o, stelle ihn horizontal, und nehme auf ihm einen Punkt an, der lothrecht über o liegt; lege nun an diesen Punkt die dioptrische Regel, visire nach allen Ecken A, B, C, D, E, und ziehe die dahin laufenden Richtungslinien oα, oβ, oγ, oδ, oε auf dem Meßtische; vergesse übrigens auch nicht, durch Zahlen die man an die Linien oα, oβ u. s. w. schreibt, zu bemerken, nach welcher Ecke oder Nummer jede der Linien oα, oβ u. s. w. hinläuft.

IV. Auf die Linie oα, trage man aus o nach a, die für oA gefundene Länge; und aus o nach b, c, d, e, eben so, die für oB, oC, oD, oE, gefundenen Maaße nach dem verjüngten Maaßstabe, ziehe demnächst a, b, c, d, e, durch gerade Linien zusammen, so wird die kleine Figur auf dem Meßtische, nemlich die abcde, der großen ABCDE auf dem Felde ähnlich

lich seyn, mithin ihren Grundris vorstellen, vorvorausgesetzt daß man oA, oB, u. s. w. horizontal gemessen hat.

IV. Die Ursache ist, weil die Dreyecke aob, boc u. s. w. denen auf dem Felde AoB, BoC u. s. w. nach der Ordnung ähnlich sind, indem z. E. in dem Dreyecke aob der Winkel aob = AoB, und die Seiten ao, ob, denen oA, oB gemäß sind, folglich ao : ob = Ao : oB ist u. s. w. demnach muß die ganze Figur abcde der ABCDE ähnlich seyn.

Anmerkung

§. 221. Diese Aufgabe kan ebenfalls nur bey Messungen, die nicht sehr ins Große gehen, gebraucht werden, und ist daher bey Vermessung der Wiesen und Aecker mit Nutzen zu gebrauchen. Indessen bleibt sie doch noch immer etwas beschwerlich, weil man viele Linien dabey unmittelbar messen muß. Auch ist sie nur in den Fällen brauchbar, wo der Umfang der Figur aus lauter geraden Linien bestehet.

Aufgabe.

§. 222. Vermittelst des Meßtisches eine Figur ABCDE Fig. LXXIII. Tab. V. die man ganz umgehen kan, zu Papiere zu bringen.

Aufl. I. Nachdem man die Punkte A, B, C, D, E, gehörig durch Stäbe und Nummern bezeichnet hat, so bringe man über A den Meßtisch, stelle ihn horizontal, und bestimme auf ihm einen Punkt a der lothrecht über A liegt.

II. Man lege an a die dioptrische Regel, visire nach B und E, und ziehe auf dem Meßtische nach B, E, die unbestimmten Richtungslinien aβ, aε, so erhält man auf dem Papiere einen Winkel εaβ, dessen Schenkel horizontal sind, und der dem Winkel BAE in der Figur gleich ist.

Oder εaβ ist der Neigungswinkel zwoer Verticalebenen die man sich über AB, AE aufgerichtet vorstellet.

III. Man messe nun mit der Meßkette die Weite AB und trage sie nach dem verjüngten Maaßstabe, von a nach b, auf die Richtungslinie aβ, welche auf dem Meßtische nach B hingezogen worden. Es versteht sich daß man eigentlich den Horizontalabstand AB messen muß, welches bey jeder folgenden Messung zu beobachten ist.

IV. Man nehme den Meßtisch von A weg und setze ihn über B dergestalt, daß er über B 1) horizontal stehe 2) daß der Punkt b, den man bey der erstern Station A erhalten hatte

(III) lothrecht über B zu liegen komme 3) daß die Linie ba längst BA eingerichtet sey. Letzteres erhält man dadurch, daß man die Regel an ba legt, und den Meßtisch so lange horizontal herumwendet, bis man durch die Dioptern, die bey A zurückgelassene Fahne oder Stange von dem Faden des Objectivdiopters bedeckt siehet.

V. In der Stellung (IV) bleibe nun der Meßtisch unverrückt, man lege die Regel an b, visire nach dem bey der dritten Station C aufgerichtetem Signale, und ziehe auf dem Meßtische nach C die Richtungslinie bγ, auf die man demnächst nach vollbrachter Messung der Weite BC eine Länge bc nach dem verjüngten Maaßstabe trägt, welche der BC gemäß ist.

VI. Hierauf bringt man den Meßtisch über die dritte Station C stellet ihn wieder horizontal, bringt den Punkt c (V) lothrecht über C, und richtet die Linie cb wieder längst CB ein, wie in (IV) legt demnächst an c die Regel, visiret nach D, und trägt die gemessene Weite CD, auf die entsprechende Richtungslinie von c nach d.

VII. Endlich wird der Meßtisch über D gebracht, und wieder nach der vorhergehenden Vorschrift so gestellet, daß d (VI) über D, und dc längst DC zu liegen komme. Man legt hierauf die Regel an d, und visiret nach dem 5ten Stationspunkt E, so wird die Richtungslinie dε,

die ae, welche bereits bey der erstern Station A auf dem Meßtische nach E hingezogen worden (II), in e durchschneiden und so die ganze Figur abcde auf dem Meßtische schließen, welche dann den Grundriß der Figur ABCDE vorstellen wird.

Bew. Wenn man sich über AB, BC, CD u. s. w. Verticalebenen aufgerichtet vorstellet, so sind die Winkel die man auf dem Meßtische an jeder Station erhält, nemlich abc, bcd, cde u. s. w. die Neigungswinkel dieser Verticalebenen gegen einander, oder die Winkel, welche man an dem Umkreise der auf den Horizont projicirten Figur ABCDE erhielte (§§. 4. 5. 6.) Es sind also die Winkel a, b, c, d nach der Ordnung denen auf den Horizont projicirten Winkeln A, B, C, D gleich.

Da ich ferner zum voraussetze, daß man die Entfernungen AB, BC nach der Horizontallinie gemessen habe, so drücken die auf den Meßtisch nach dem verjüngten Maaßstabe aufgetragenen Weiten ab, bc u. s. w. die verjüngten Seitenlinien der auf den Horizont projicirten Figur ABCDE aus.

In der Figur abcde folgen also die Winkel und Seiten in eben der Ordnung, Gleichheit und Verhältniß auf einander, wie in der projicirten Figur ABCDE, d. h. abcde muß der

Pro-

Projection von ABCDE auf die Horizontalfläche, ähnlich seyn, mithin den Grundriß von ABCDE vorstellen.

Ob zwar gleich die beyden letzten Linien de, ae, nicht durch unmittelbare Messung gefunden, und aufgetragen worden, sondern sich bloß durch den Durchschnitt e ergeben haben, so müssen sie doch denen Horizontalweiten DE, AE, ähnlich seyn, weil A, B, C, D, und Seiten AB, BC, CD, zur Bestimmung der Figur ABCDE, als eines Fünfecks, hinreichend sind.

Eben das Verfahren, das ich bisher bey einem Fünfecke gewiesen habe, läst sich nun, wie leicht erhellet, auf jedes Polygon anwenden, und man kan also von jeder Figur die man umgehen kan, den Grundriß auf dem Meßtische bestimmen.

Proben ob man richtig gemessen hat.

§. 223. Man darf wohl selten erwarten, daß die auf dem Meßtische, erhaltene Figur abcde, dem Grundrisse von ABCDE vollkommen ähnlich seyn werde. Denn die kleinen Fehler, die sowohl in Bestimmung der Winkel, als auch im Messen und Auftragen der Seiten begangen werden, und bey aller angewandten Vorsicht des Feldmessers unvermeidlich sind, werden verursachen, daß die Figur abcde, der Projection

von ABCDE, nie vollkommen in allen Stücken ähnlich seyn wird. Man kan nun wohl fragen, ob sich nicht einige Mittel angeben lassen, die Figur auf dem Meßtische zu prüfen, ob sie viel oder wenig von der Figur ABCDE abweichet. Die Gründe zu diesen Prüfungen, sind nun kürzlich in folgenden enthalten.

I. Es bedeute künftig ABCDE die auf den Horizont projicirte Figur selbst, davon also abcde den Entwurf auf dem Papiere vorstellet, so erhellet folgendes.

Wenn das im 222 §. gewiesene Verfahren vollkommen ohne Fehler behandelt wird, so müssen die in den vorhergehenden Stationen auf dem Meßtische gezogenen Linien an jeder folgenden Station, mit den zugehörigen Linien in der Figur auf dem Felde, parallel werden, so bald in jeder folgenden Station der Meßtisch gehörig eingerichtet worden. Z. B. wenn bey der Station des Meßtisches über C, die Linie cb längst CB eingerichtet worden, folglich cb mit CB in einer geraden Linie liegt, so werden die Linien ba, aε, die man bereits bey den vorhergehenden Stationen auf dem Meßtische erhalten hatte, den entsprechenden Linien BA, AE parallel seyn, weil die Winkel cba = CBA, und baε = BAE sind. Auf eben die Art sind z. E. bey der 4ten Station des Meßtisches über D, die Linien cb, ba, ae auf dem Meßtische, denen entsprechenden Li-

nien

nien CB, BA, AE parallel. Dieser Satz ist aus der Lehre von Parallellinien und dem bisher beschriebenen Verfahren so klar, daß es nicht nöthig ist ihn weiter zu beweisen; eine wichtige Folge ist aber diese.

Weil z. E. bey der Station über D, die Linie cb, der Linie CB, parallel ist, (vorausgesetzt daß dc längst DC fällt) und ferner dc : cb = DC : CB, so müssen die Punkte d, b, B in gerader Linie liegen. Weil also dieses ist, und ferner ba mit BA parallel, wie auch db : dB = ba : BA seyn muß, so werden auch die Punkte d, a, A in gerader Linie liegen.

Wenn also bey der Vermessung keine Fehler vorgefallen sind, so müssen bey einer gewissen Station des Meßtisches, wie z. E. über D, alle Diagonallinien, db, da, welche aus dem lothrecht über D liegenden Punkte d ausgehen, mit den entsprechenden Diagonallinien DB, DA in gerader Linie, oder in einer Verticalebene liegen, und wenn man an die Diagonallinien db, da, der Figur auf dem Meßtische, das Dioptrlinial legt, so müssen die Dioptern, nach den bey B, A, aufgerichteten Signalen hinzielen.

Hieraus läst sich also auf eine sehr leichte Art prüfen, ob die Figur abcde auf dem Meßtische ihre gehörige Richtigkeit habe. Man lege, nachdem an einer gewissen Station der Meßtisch gehörig ein-

gerichtet worden, das Diopterlinial an die Diagonallinien db, da, und untersuche ob alsdann der Faden des Objectivdiopters genau die bey B, A, aufgerichteten Stäbe decket. Geschiehet dieses, so ist die Figur abcde, der ABCDE vollkommen ähnlich; je mehr aber die an db, da gelegten Dioptern an den Signalen B, A, vorbeystreichen, desto grösser ist die Unrichtigkeit des Grundrisses, desto mehrere und gröffere Fehler sind also während der Arbeit begangen worden.

Man kan nun diese Probe des Zurückvisirens nach den bereits erhaltenen Objecten, an jedem Standpunkte des Meßtisches bewerkstelligen, und während der Arbeit selbst, sich von der Richtigkeit der bereits auf dem Meßtische erhaltenen Punkte versichern. Z. E. bey dem Standpuncte des Meßtisches über C, lege man, nachdem der Meßtisch gehörig eingerichtet worden, das Diopterlinial an die Diagonale ca; siehet man alsdann in dem Faden des Objectivdiopters, das bey A aufgerichtete Signal, so ist während der Messung von A bis C kein merklicher Fehler vorgefallen.

II. Diese Art an jedem Standpunkte den Grundriß zu prüfen ist in der That eine von den besten Methoden, sich von der Richtigkeit der Arbeit zu versichern. Oft verstatten es aber die Umstände nicht, an jedem Standpunkte nach den Diagonallinien der Figur zurückzuvisiren. Wie

wenn

wenn z. E. ABCDE den Umriß eines Waldes vorstellte; da würde man vergebens diese Prüfungsart vornehmen, weil sich wegen der Gebüsche das Zurückvisiren nicht anstellen läst.

In solchen Falle läst sich also selten, während der Arbeit selbst, die Prüfung der auf dem Meßtische bereits erhaltenen Punkte bewerkstelligen, sondern man muß warten, bis man mit dem Meßtische an den letzten Stationspunkt E hinkömt, wo sich alsdann zeigen wird, ob sich die Figur auf dem Meßtische in dem gehörigen Punkt schlieset oder nicht.

Man begnüge sich nemlich an dem vorletzten Stationspunkt D nicht damit, daß sich durch den Durchschnitt e die Figur auf dem Meßtische schlieset; sondern nachdem man bey D den Meßtisch gehörig eingerichtet und nach E visirt hat, so messe man auch die Weite DE, und trage sie auf die entsprechende Richtungslinie von d nach i; hier wird sich nun schon zeigen, ob die durch den Durchschnitt e gefundene Weite de, mit der wahren DE übereinstimt oder nicht.

Da nemlich, wenn während der Messung keine Fehler vorgefallen sind, die durch den Durchschnitt e gefundenen Entfernungen de, ae, denen auf dem Felde DE, AE, gemäß seyn müssen, so ist klar daß wenn man z. E. zur Probe die Linie DE gemessen, und sie von d nach i getragen hat,

di

di = de seyn, folglich e auf i fallen müsse; geschiehet nun dieses nicht, so ist zuverläßig während der Arbeit, ein Fehler vorgefallen, und dieser Fehler wird desto beträchtlicher seyn, je mehr die Punkte e und i von einander abstehen.

III. Nachdem man die Weite DE gemessen, und von d nach i getragen hat, so bringe man den Meßtisch über die letzte Station E, so daß i lothrecht über E liege, und id längst ED eingerichtet werde, lege hierauf an i die dioptrische Regel, und visire nach A; wenn nun während der Vermessung keine grossen Fehler vorgefallen sind, so muß das nach A gerichtete Diopterlinial, auf dem Grundrisse durch den Punkt a gehen, d. h. die Figur auf dem Meßtische muß sich in dem wahren Punkte a schließen. Geschiehet dieses aber nicht, sondern die dioptrische Regel, streichet bey der Richtung der Dioptern nach A, an a vorbey, wie z. E. i α, so ist die Abweichung des Grundrisses abcde, von der wahren Figur ABCDE, desto grösser, je grösser der Abweichungswinkel α i a ist.

Wenn das nach A gerichtete Diopterlinial würklich durch a gehet, also die Figur sich in dem wahren Punkte a schließet, so sind entweder während der Vermessung keine Fehler vorgefallen, oder die an jedem Stationspunkte begangenen Fehler haben sich während der Arbeit wieder aufgehoben. Da

aber

aber letzteres sehr selten geschiehet, so kan man immer behaupten, daß wenn sich die Figur in dem wahren Punkte a schließet, die Figur abcdi der ABCDE vollkommen ähnlich seyn, oder wenigstens so wenig von ihr abweichen werde, daß man den Fehler ausser Acht lassen kan.

IV. Diese beyden Methoden (II. III) werden also in jedem Falle wenigstens ein Merkmahl abgeben, ob die Figur auf dem Meßtische von der auf dem Felde, viel oder wenig abweichet; und so geben diese Methoden eine Prüfung ab, ob man irgendwo beträchtlich gefehlet habe oder nicht; allein wenn man solchergestalt am Schluße der Figur einen Fehler findet, wie kan man wissen an welcher Station derselbe begangen worden? wie kan man die nöthige Korrection der Figur bewerkstelligen? diese Untersuchung ist in der That oft ziemlich schwer, wo nicht völlig unmöglich, besonders wenn man an mehreren Standpunkten gefehlet hat. Ich weiß wohl daß von verschiedenen Feldmessern Regeln angegeben worden sind, eine fehlerhafte Figur zu corrigiren, allein diese Vorschriften sind auf keine gewissen Gründe gestützet, und bestehen meistens nur in einem Zusammenzerren der Figur. Am richtigsten würden noch diejenigen Methoden seyn, nach denen man den am Schluße der Figur erhaltenen Winkel α i a, in die übrigen Winkel b, c, d u. s. w. gehörig vertheilte. In sehr

vielen

fallen, wird aber der Winkel α i a so unbeträchtlich seyn, daß man ihn ohne Fehler außer acht lassen, und die Figur abcdi der ABCDE gleich setzen kan.

Ist aber der Winkel α i a sehr beträchtlich, so ist zu vermuthen, daß irgendwo in einer Station aus Unvorsichtigkeit ein grober Fehler begangen seyn muß. Denn die unvermeidlichen, kleinen Fehler, die gewis in jeder Station begangen werden, werden sich selten so häufen daß α i a von ansehnlicher Grösse seyn solte.

Da es aber eine unverzeihliche Nachläßigkeit des Feldmessers seyn würde, an mehr als einer Station einen groben Fehler zu begehen, besonders wenn die Figur nicht sehr viele Winkel an ihrem Umkreise hat, da es ferner nicht wahrscheinlich ist, daß die in Messung der Linien vorgefallenen kleinen Unrichtigkeiten am Schluß der Figur einen beträchtlichen Abweichungswinkel α i a hervorbringen solten, da überdem in Messung der Linien nie so leicht gefehlet werden kan, als in Zeichnung der Winkel auf dem Meßtische, so können wir immer annehmen, daß wenn man am Schluße der Figur einen beträchtlichen Abweichungswinkel findet, solcher meistens daher rühre, weil in irgend einer Station wegen einer etwa vorgefallenen Verrückung des Meßtisches, ein Fehler in Bestimmung des Winkels auf dem

Meß-

Meßtische begangen worden ist. Und wir werden nun zeigen

Wie man, unter der Voraussetzung daß nur an einer Station ein grober Fehler begangen worden ist, die Station im Risse aufsuchen könne, wo diese Unvorsichtigkeit vorgefallen ist.

§. 224. Es stelle Fig. LXXIV. ABCDEF den Umkreiß der in Grund zu legenden Figur vor; man habe die Messung bey A angefangen, und sie nach der Richtung ABCDEF vorgenommen.

So würde man bey der letzten Station F, nach gehöriger Stellung des Meßtisches auf demselben die Figur abcdef erhalten, und wenn während der Messung keine Fehler vorgefallen sind, so muß die Figur abcdef der ABCDEF vollkommen ähnlich seyn, und wenn f lothrecht über F liegt, wie auch fe gehörig längst FE eingerichtet ist, so werden die Linien ab, bc, cd u. s. w. denen AB, BC, CD u. s. w. parallel seyn (§. 223. I. II) und die Dioptern des an fa gelegten Dioptertinials müssen wieder genau auf den ersten Standpunkt A eintreffen, mit einem Worte, die Figur abcdefa muß sich auf dem Meßtische vollkommen schliessen.

II. Hätte man aber z. E. bey der Station D aus Unvorsichtigkeit, einen groben Fehler begangen, daß man statt des wahren Winkels CDE = cde, den fehlerhaften γde, welcher um γdc grösser als der wahre ist, bekommen hätte, so würde man, (weil ich voraussetze daß blos in dem Winkel d gefehlet worden ist) auf dem Meßtische, nach gehöriger Einrichtung desselben an der letzten Station F, nicht die wahre Figur abcdef, sondern die fehlerhafte αβγdef erhalten, und weil bloß in dem Winkel d gefehlet worden, alles übrige aber richtig ist, so wären nach dieser Voraussetzung, αβ = ab, βγ = bc, γd = cd, αβγ = abc, βγd = bcd, u. s. w. nemlich in der falschen Figur αβγdef alle Seiten und Winkel so groß, wie in der wahren abcdef, den einzigen Winkel γde ausgenommen.

III. Es würde also über der letzten Station F, wegen des bey d begangenen Fehlers, sich die Figur auf dem Meßtische nicht schliessen; denn da man statt des wahren Punktes a den fehlerhaften α erhielte, so würden, die Dioptern des an f und α gelegten Linials, nicht auf den Punkt A wieder eintreffen, sondern die gerade Linie fα, würde in der Linie AB auf einen Punkt A' ziehlen, der um den Abstand A'A von A wegläge, und der Winkel αfA, würde den Abweichungswinkel am Schlusse der Figur vorstellen.

IV. Man siehet ferner, daß die Linie fα auf der fehlerhaften Figur, nicht der wahren Entfernung FA gemäß seyn würde, und wenn man FA würklich mäße, und sie nach dem verjüngten Maaßstabe von f nach a, auf die nach A hingezogene Richtungslinie trüge, so würde auf dem Meßtische, a der wahre Schlußpunkt, α aber der fehlerhafte seyn; die Figur αβγdeta schlösse sich also nicht; sondern stände innerhalb des Raumes aα offen.

Es frägt sich nun, den Standort d zu finden, wo der Fehler begangen worden ist.

Um dieses zu leisten, so wollen wir die fehlerhafte Figur mit der wahren vergleichen.

V. Man stelle sich vor, von dem Punkt d, wo der Fehler vorgefallen, würden ein paar gerade Linien dα, da nach dem falschen und wahren Schlußpunkt gezogen, so erhellet folgendes.

Weil in beyden Figuren αβγδα, abcda, αβ = ab, βγ = bc, γd = cd, und die Winkel αβγ = abc, βγδ = bcd, so muß die Figur αβγδα der abcda gleich und ähnlich seyn, und wenn man sich vorstellet, die Figur dγβα, werde auf die dcba so gelegt, daß d auf d, γ auf c, β auf b und α auf a fiele, so würde auch dα auf da, und γdα auf cda fallen, also dα = da, γdα = cda seyn, woraus

dann ferner folgt, daß der bey dem Standpunkte d begangene Fehler, nemlich der Winkel γdc = αda sey.

VI. Man siehet also, daß der Standpunkt d, wo auf dem Felde der Fehler begangen worden, die Eigenschaft habe, daß er von dem wahren und falschen Schlußpunkte α, a, gleichen Abstand dα = da hat, und es läst sich leicht darthun, daß kein einziger Punkt wie z E. β, γ, die erwähnte Eigenschaft habe, daß nemlich βα = βa, γα = γa u. s. w. sey.

Dies giebt also folgendes Mittel in der Figur αβγdefa die sich auf dem Papiere nicht schliessen will, den fehlerhaften Standpunkt d, mithin auch den zugehörigen Punkt D auf dem Felde zu finden.

Man ziehe von den nach (IV) gefundenen wahren und falschen Schlußpunkten α, a, nach allen Ecken β, γ, d, e, gerade Linien oder Diagonalen; der Punkt d, wo die beyden Diagonalen αd, ad, einander gleich werden, wird die Station geben, wo man auf dem Felde gefehlet hat, und der Winkel αda dieser beyden Diagonalen, ist die Grösse des an der Station d begangenen Fehlers (V), weil αda = γdc.

Die

Die fehlerhafte Figur zu korrigiren.

§. 225. Nachdem, nach dem vorhergehenden § die Station d, wo man auf dem Meßtische den fehlerhaften Winkel γ d e erhalten hat, gefunden worden ist, so beschreibe man über der nach dem wahrem Schlußpunkte a hinlaufenden Diagonale da, die Figur α β γ d, dergestalt daß α β γ d in die wahre Lage abcd zu liegen komme.

Dieses wird sich gar leicht vermittelst der Seiten und Diagonalen der Figur α β γ d bewerkstelligen lassen; ist nun dieses geschehen, so ist abcdef der wahre Grundriß von ABCDEF.

Solchergestalt ist es also, unter der Voraussetzung, daß in den Winkeln am Umfange der in Grund zu legenden Figur nur ein einzigesmahl gefehlet worden, gar leicht, die fehlerhafte Figur zu corrigiren.

Uebrigens kan man, um mehrerer Sicherheit willen, sich mit dem Meßtische nach der zweifelhaften Station D hinbegeben, die Linie de längst DE einrichten, und dann untersuchen, ob d γ von der Richtung DC gerade so viel abweicht, als d γ von dc, oder d α von da; findet sich dieses würklich so, so ist gar kein Zweifel mehr übrig, daß D würklich die Station sey, an der gefehlet worden ist.

Wenn an mehreren Stellen der Figur grobe Fehler vorgefallen sind.

§. 226. In diesem Falle reichet die Gleichheit der beyden Diagonalen $d\alpha$, da, nicht zu, die fehlerhaften Stationen auszufinden; denn daß $da = d\alpha$ in jedem Falle den fehlerhaften Punkt d angiebt, gründet sich darauf, daß nur an einer Station gefehlet worden.

Indessen kan man sicher behaupten, daß, wenn man am Schluße der Figur einen beträchtlichen Abweichungswinkel $\alpha f a$ findet, und man hierauf von α, a, nach allen Eckpunkten β, γ, d, e, u. s. w. Diagonalen ziehet, und dennoch nirgend ein paar Diagonalen wie αd, ad einander gleich findet, zuverläßig an mehr als einer Station gefehlet worden seyn müsse.

Eben dieses würde statt finden, wenn man gleiche Diagonalen an mehr als zwoen Stellen der Figur fände.

Wie man aber in solchen Falle die fehlerhaften Stationspunkte würklich ausfindig machen könne, dazu habe ich noch keine allgemeine und leichte Methode finden können. Denn die Gleichheit der Diagonalen, reicht in denen Fällen, wo an mehreren Stellen gefehlet worden, nicht zu, die fehlerhaften Stationen aufzusuchen, sondern es

müssen

müssen noch andere Hülfsmittel, und Umstände in Erwägung gezogen werden.

Es giebt zwar einzelne Fälle, wo es leicht ist, die Fehler an mehreren als einer Station aufzusuchen, da aber dergleichen Fälle in der Ausübung selten vorkommen, so werde ich hier nichts davon beybringen, und ich gedenke sowohl diese Fälle, als auch andere Eigenschaften, wodurch sich die fehlerhaften Stationen ausfinden lassen, einmahl bey einer andern Gelegenheit bekannt zu machen, da die darüber angestellten Untersuchungen für jetzt noch zu unvollkommen sind.

Einige Vorsichten und Erinnerungen die beym Verfahren des 222 §. beobachtet werden müssen.

§. 227. I. Es ist vortheilhaft daß man gleich anfangs, ehe man die Messung vornimmt, die Figur ABCDE umgehet, und ohngefähr nach dem Augenmaaße, oder wenn es angehen kan durch Schritte, die längste Diagonallinie bestimmt. Dies geschiehet deswegen, damit man auf dem Meßtische den verjüngten Maaßstab darnach proportioniren könne, damit derselbe unnöthiger Weise nicht zu klein, und wegen anderer Unbequemlichkeiten nicht zu groß angenommen werde. Auch wird man durch diese Vorbereitung, desto sicherer den ersten Punkt a, Fig. LXXIII. wo die

Messung auf dem Meßtische angefangen werden soll, wie auch die schicklichste Lage der ersten Linie ab bestimmen. Denn es ist klar, daß man a, und ab so auf dem Meßtische annehmen müsse, daß die ganze Figur abcde auf demselben erhalten werden kan.

II. Es geschiehet sehr oft, daß beym Fortgange der Arbeit, Theile der Figur auf dem Meßtische, sehr nahe an den Rand desselben kommen, und nur wenig Platz da ist, die dioptrische Regel gehörig anzulegen. In diesem Falle rathe ich beym Visiren, und genauem Anlegen des Diopterlinials alle mögliche Vorsicht zu beobachten weil an solchen Stellen der Figur gar leicht Fehler begangen werden. Auch ist es gut, auf dem Meßtische die Linien neben dem Liniale, so lang als möglich auszuziehen, oder wenigstens auf dem Rande des Meßtisches, die Verlängerung der gezogenen Linien, durch einen kleinen Strich zu bemerken, damit man beym Zurückvisiren alsdann sicherer die dioptrische Regel, wieder an die einzurichtende Linie anlegen könne. So z. E. würde ich bey der Station B, wo ich die Richtung bc zöge, nicht allein bey γ, sondern auch bey γ an dem Rande des Meßtisches die Verlängerungen von bc andeuten; und wenn ich nachher an die folgende Station C käme, so würde ich bey Einrichtung der Linie cb längst CB, das Diopterlinial nicht bloß an die Punkte b, c,

legen (denn da kan man gar zu leicht fehlen, besonders wenn b, c sehr nahe neben einander liegen) sondern es vielmehr an die Verlängerungen y, γ, anlegen, weil man offenbar, wegen der grösseren Entfernung yγ, die wahre Richtung der Linie bc weit sicherer erhält, als wenn man das Linial bloß an die näher zusammenliegenden Punkte b, c anlegte. Dieses ist bey jeder folgenden Station zu beobachten.

III. Es geschiehet sehr oft, daß, wenn die Punkte A, B, C, D, E, nicht in einer einzigen Ebene liegen, man bey einer gewissen Station nicht nach der folgenden hinvisiren, oder nicht nach der vorhergehenden zurückvisiren kan, weil nemlich diese Stationen, entweder zu hoch oder zu niedrig liegen.

In diesem Falle muß man mit aller möglichen Sorgfalt vorher einen Stab in die Verticalebene der beyden Stationen einsetzen, der nahe genug beym Meßtische stehet, daß man nach ihm die dioptrische Regel richten kan.

So z. E. wenn C sehr viel niedriger oder höher als B läge, daß ich C durch die Dioptern nicht sehen könte, so würde ich vorher bey M nahe genug bey B, einen Stab genau in die Verticalebene BC einsetzen; dann wäre es einerley ob ich die Dioptern nach C oder nach dem Stabe M richtete, um die Visirlinie bγ, auf dem Meß-

tische zu ziehen. Aber zugleich erhellet auch die Nothwendigkeit der im 33 §. erwähnten Regeln und Vorsichten, den Stab bey M gehörig einzusetzen.

IV. Wenn man bey einer gewissen Station z. E. C die Linie cb auf dem Meßtische nach der vorhergehenden Station B einrichten will, und zwar so, daß der Punkt c zugleich ohne merklichen Irrthum lothrecht über C zu liegen komme, so muß man vorher nur ohngefähr nach dem Augenmaaße die Linie cb längst CB einrichten, ehe man den Punkt c durch gehörige Verrückung des Meßtisches über C bringt. Denn hätte man gleich anfangs c über C gebracht, und müste nachher den Meßtisch viel wenden, um cb nach B hinzurichten, so würde der Punkt c nicht lothrecht über C bleiben, sondern sich bey der Horizontalwendung des Tischgens, wieder merklich von C entfernen. Wenn man aber erst ohngefähr cb längst CB eingerichtet hat, und dann c lothrecht über C bringt, so wird man nicht nöthig haben, den Meßtisch noch viel zu rücken, um cb demnächst völlig genau längst CB einzurichten, mithin, wird sich auch der Punkt c nicht merklich von C entfernen, indem man den Meßtisch herumdrehet.

V. Wenn die Messung von Wichtigkeit ist, so dienet es zur Vorsicht, an jeder Station, einen

Pfahl

Pfahl zurückzulassen, damit, wenn man irgendwo in der Folge einen groben Fehler in der Figur entdecken solte, man desto sicherer die vorhergehenden Stationen wieder finden, die begangenen Fehler aufsuchen, und corrigiren könne, ohne daß man jedoch nöthig hätte die ganze Messung wieder von Vorne anzufangen. Dergleichen Pfähle werden etwas tief in die Erde geschlagen, und allenfalls auch die Stationnummern darauf bemerket.

VI. Eine Figur, die an ihrem Umkreise sehr grosse Seiten, und viele Winkel hat, wie solches unterweilen, bey Dorf und Waldvermessungen zu geschehen pflegt, wird meistens durch eine einzige Messung nicht auf den Meßtisch gebracht werden können, ohne den Maaßstab so klein anzunehmen, daß der Grundriß zu seiner Absicht unbrauchbar wird. In solchen Fällen ist man genöthigt, eine so große Figur in mehrere einzelne Stücke zu zerlegen, jedes Stück besonders auszumessen, und dann diese einzelnen Entwürfe in eben der Ordnung wie man sie auf dem Felde vorgefunden hat, zu Hause auf einem grossen Blatt Papiere, mit einander zu verbinden. Auf Wiesen, die man bequem übersehen kan, hängt es von unserer Willkühr ab, den einzeln Stücken eine bequeme Gestalt zu geben. Bey Waldvermessungen bestimmen sich die einzeln Stücke oft durch Wege, die durch die Holzungen laufen.

Doch alle hieher gehörigen Umstände, die nöthige Vorsicht, die man in der Auswahl und Verbindung der einzeln Entwürfe zu beobachten hat, werden in der Folge, wenn wir von Ausmessung ganzer Fluren reden, mit mehreren auseinandergesetzt. Jetzt beschäftigen wir uns nur den Gebrauch des Meßtisches und anderer Werkzeuge zur Entwerfung einzelner Polygone zu zeigen, und die verschiedenen Methoden ins Licht zu setzen, deren sich ein Feldmesser demnächst bey großen Vermessungen nach Verhältniß der Umstände bedienen kan.

Anmerkung, krumme Linien betreffend.

Man pflegt sich vorzüglich, der Messung aus der Peripherie zu bedienen, wenn Figuren, die mit krummen Linien umschlossen sind, zu Papiere gebracht werden sollen. Da wird nun die krumlinigte Figur mit einer geradlinigten umschlossen, die geradlinigte nach dem gewiesenen Verfahren, aus der Peripherie vermessen; und hierauf zugleich während dieser Messung die Punkte der krummen Linie, die längst den Seiten der geradlinigten Figur herläuft, durch Abscissen und Ordinaten bestimmt und auf den Meßtisch getragen. Wenn zum Beyspiel Fig. LXXIII $\mu\nu$, ein Stück von der krumlinigten Figur wäre, die von der geradlinigten eingeschlossen ist, so würde man den Theil $\mu\nu$, der längst BC läge, durch Ab-

scissen und Ordinaten Mμ, Nν, die man, während BC gemessen würde, zugleich mit bestimte, entwerfen können, indem man auf die entsprechende Linie bc, die gemessenen Abscissen BM, BN, u. s. w. von b nach m, und von b nach i u. s. w. trüge, hierauf die Ordinaten mn, ik denen Mμ, Nν, u. s. w. gemäß nähme, und durch die solchergestalt gefundenen Punkte n, k u. s. w. auf dem Meßtische die krumme Linie nk auszöge.

Auf diese Art, würde man jeden Theil der krumlinigten Figur, zugleich während der Vermessung der geradlinigten, mit auf den Meßtisch bringen können. Es wird aber gut seyn, von allen gemessenen Abscissen und Ordinaten, wie auch von den Seiten der geradlinigten Figur ein genaues Diarium zu halten, denn oft erlaubt es die Zeit nicht auf dem Felde sogleich mit aller nöthigen Schärfe die Abscissen und Ordinaten gehörig aufzutragen; und da man doch gewöhnlich die Figur auf dem Meßtische zu Hause ins Reine auf ein anderes Blatt Papier zu bringen pflegt, so ist es besser, die Maaße der Abscissen und Ordinaten, aus dem Diario zu nehmen, als sie wieder von dem Meßtische abzutragen. Bey dem Entwurfe, den man von der krumlinigten Figur auf dem Meßtische erhält, kömt es nicht so sehr auf die genaue Auftragung der Abscissen und Ordinaten, als vielmehr auf die Bemerkung der Umstände an, worauf sich die Punkte der krummen Linie beziehen, d. h.

ob

ob sie z. E. zur Krümmung eines Flußes, eines Weges, einer Gränze u. s. w. gehören; welches man dann durch eine Zeichnung auf dem Meßtische andeutet, wodurch alsdann beym Auftragen zu Hause, der Einbildungskraft sehr geholfen wird, wenn auch gleich nicht mit aller nöthigen Schärfe, die krumlinigte Figur auf dem Meßtische gehörig bestimmt worden wäre.

Die Hauptsache ist, daß nur die geradlinigte Figur ABCDE, auf die man die übrigen Abmessungen gründet, mit aller möglichen Genauigkeit auf dem Meßtische erhalten werde.

Aufgabe.

§. 228. **Eine Figur ABCDEF Fig. LXXV. die man aus einer Station A ganz übersehen kan, zu Papiere zu bringen.**

Aufl. I. Man setze den Meßtisch in A, stelle ihn horizontal, und visire aus dem Punkte a, der lothrecht über A angenommen worden, nach allen Eckpunkten B, C, D, E, F, und ziehe auf dem Meßtische die dahin gehenden Richtungslinien $a\beta$, $a\gamma$, $a\delta$, $a\varepsilon$, $a\varphi$.

II. Hierauf messe man alle Seiten AB, BC, CD, DE, EF.

III. Die Seite AB trage man nach dem verjüngten Maaßstabe auf die entsprechende Richtungslinie aβ, von a nach b.

Mit der Seite bc die man der BC gemäß nimt, durchschneide man aus b, die Diagonale aγ, in c, aus c schneide man mit cd die der CD gemäß ist, die Diagonale aδ in d, u. s. w. so wird man auf dem Meßtische eine Figur abcdef erhalten, die der ABCDEF ähnlich ist.

Anmerkung. Wenn man sich mit dem Halbmesser bc aus b einen Kreiß beschrieben vorstellet, so wird solcher die aγ, in zween Punkten c, n, durchschneiden, und es ist bn = bc.

Es wird aber hier das Dreyeck abn nicht dem ABC ähnlich seyn, weil in der Figur, ABC ein stumpfer, abn, ein spitzer Winkel ist; wenn man also nach der Vorschrift (III) mit der Seite bc die Diagonale aγ durchschneidet, so finden eigentlich zween Durchschnittspunkte c, n, statt, davon aber hier nur der c zu gebrauchen ist, welcher das Dreyeck abc dem ABC ähnlich macht.

Wie soll man aber nun in jedem Falle, die Zweydeutigkeit der beyden Punkte c, n, entscheiden? wie kan man wissen, welchen man unter beyden Punkten c, n, in jedem Falle wähle

wählen müsse, damit man das richtige Dreyeck abc erhalte.

Diese Zweydeutigkeit zu entscheiden, muß man nur wissen ob der Winkel ABC auf dem Felde stumpf oder spitzig ist. Man braucht aber diesen Winkel nicht würklich zu messen, man kan ihn bloß nach dem Augenmaaße schätzen. So bald man aber die Natur des Winkels ABC weiß, so wählet man unter beyden Durchschnittspunkten c, n, derjenigen c, der eben den spitzen oder stumpfen Winkel abc giebt, den CB mit AB auf dem Felde macht.

Nach dieser Bemerkung und Vorsicht, wird es selten sonderliche Schwürigkeit haben, die wahren Punkte, b, c, d, e, f, auf den Diagonallinien zu bestimmen.

Und so kan diese Aufgabe, auf dem Felde von sehr großen Nutzen seyn, indem sie eine der bequemsten Methoden ist, eine Figur die man ganz übersehen kan aus der Peripherie zu vermessen, und weil man nur an einer einzigen Station A Winkel aufzunehmen braucht, so ist dieses Verfahren zugleich eines der richtigsten.

Wenn längst der geraden Linien AB, BC, u. s. w. krumme herlaufen, so bestimmt man sie durch Ordinaten und Abscissen, die man demnächst, an die entsprechenden Linien ab, bc u. s. w.

sezt, und dann die krumme Linie auf dem Meßtische verzeichnet.

Aufgabe.

§. 229. Eine Figur aus ihrem Umfange zu Papiere zu bringen ohne daß man nöthig hat, alle Seiten ringsherum zu messen.

Aufl. Es sey Fig. LXXVI. die zu entwerfende Figur.

I. Um nun dieselbe zu Papiere zu bringen, so nehme ich an, daß sich innerhalb derselben Gegenstände R, M befinden, die man an allen Ecken der Figur sehen kan.

II. Man suche nun eine Seite der Figur z. E. AB aus, von der Beschaffenheit, daß die Punkte R, M, eine bequeme Lage gegen dieselbe haben, und die Linien BM, MA, RB, RA nicht zu spitze oder stumpfe Winkel mit AB machen.

III. Diese Linie AB sehe man als eine Standlinie an, und bringe vermittelst derselben, erstlich die Punkte R, M, auf den Meßtisch (§. 184).

Man seßet nemlich den Meßtisch über A, und ziehet aus dem Punkte a der lothrecht über A liegt, nach B, M, R, die Richtungslinien $a\beta$, $a\mu$, $a\varrho$; misset demnächst AB, und trägt sie

auf

auf die zugehörige Richtung a β, von a nach b. Nun stellt man den Meßtisch über B, bringt b lothrecht über B, richtet ba längst BA ein, und ziehet aus b abermahls nach R, M, Richtungslinien, so werden dieselben, die bereits bey der ersten Station gezogenen Richtungen a ϱ, a μ, in r, m, durchschneiden, und r, m werden gegen ab, eben die Lage haben die R, M, gegen AB haben, weil die Dreyecke abr, ABR und abm, ABM, einander ähnlich sind (§. 184).

IV. Bey unverrückter Stellung des Meßtisches ziehe man nun auch aus b nach C die Richtung b γ.

V. Ohne nun die Linie BC würklich zu messen, begebe man sich mit dem Meßtische sogleich nach der dritten Station C, stelle und verrücke ihn so lange, bis die bereits in (IV) auf demselben gezogene Linie b γ, bey der dritten Station genau in die Verticalebene CB zu liegen komme; welches man sowohl vermittelst einer Gabel, deren von b γ herabgelassenes Loth durch C gehen muß, als auch durchs Zurückvisiren nach B erhalten kan.

VI. Nach dieser gehörig eingerichteten Stellung des Meßtisches, lege man die Alhidadenregel an einen der beyden Punkte r, oder m, und visire nach den zugehörigen Objekten R oder M, so werden die Richtungslinien rR, oder mM,

rück-

rückwärts verlängert, auf der Linie b γ, den Punkt c bestimmen, und dieser Punkt c wird auf dem Papiere, den wahren Standpunkt des Meßtisches angeben, dergestalt, daß, wenn man von c ein Loth auf den Boden herabfällt, die Weite von B nach diesem Punkte, durch bc auf dem Meßtische ausgedrückt wird.

VII. Diesen Satz zu beweisen, so betrachte man die beyden Dreyecke MBc, mbc, welche einander ähnlich sind; denn es ist der Winkel MBc = mbc; da nun ferner wegen (V) B, b, c in gerader Linie liegen, so werden wegen der gleichen Winkel mbc, MBc, die Linien MB, mb, parallel seyn, folglich von der dritten Mc unter gleichen Winkeln BMc = bmc geschnitten. — Mithin hat wegen des gemeinschaftlichen Winkels McB = mcb, das Dreyeck mcb eben die drey Winkel, die das Dreyeck MeB hat; beyde Dreyecke sind also einander ähnlich; folglich ist

BM : bm = Bc : bc

Aber wegen (III) ist auch

BM : bm = AB : ab

also AB : ab = Bc : bc

d. h. weil ab der AB gemäß gemacht worden, so wird auch bc der Bc gemäß seyn.

VIII. Eben dieser Beweiß gielt von den Punkten R, r, weil auf eben die Art die beyden Dreyecke BRc, brc, einander ähnlich sind.

Es ist klar, daß die verlängerte Richtung Mm, allein schon zureichend ist, auf der Linie B γ, den Standpunkt des Meßtisches, oder den Punkt c abzuschneiden. — Allein um sich vonder Richtigkeit der Arbeit zu versichern, so ist es vortheilhaft, auch vermittelst der Richtungslinie Rr den Punkt c zu bestimmen; denn wenn der Meßtisch bey c seine gehörige Stellung nach (V) erhalten hat, und übrigens die Objecte R, M, richtig auf dem Meßtische bestimmt worden, so muß das an r gelegte und nach R gerichtete Diopterlinial gleichfalls durch c gehen, oder die Richtungslinien Mm, Rr, müssen rückwärts verlängert, sich auf bc, in einem und demselben Punkte c schneiden.

IX. Man siehet leicht, daß man auf eben die Art, und nach eben den Gründen, auch jeden folgenden Stationspunkt des Meßtisches z. E. D auf dem Papiere bestimmen könne. — Nachdem man in (VI) den dritten Stationspunkt c richtig gefunden hat, so lasse man den Meßtisch unverrückt, und ziehe erstlich aus c nach D die unbestimmte Richtungslinie cδ, proiicire alsdenn vermittelst einer Gabel den Punkt c auf den Boden, und stecke daselbst einen Stab ein. —

Bege-

Begebe sich hierauf mit dem Meßtische nach der vierten Station D, und stelle ihn daselbst so, daß die Linie dc in der Verticalebene liege, die durch D und den bey der dritten Station proiicirten Punkt c gehet. — Lege alsdann an r, m, abermahls das Diopterlinial und visire nach den zugehörigen Objekten R, M, so werden die rückwärts verlängerten Richtungslinien Rr, Mm, auf dem Meßtische die vierte Station d bestimmen — und so erhellet, wie man nach und nach jeden Stationspunkt des Meßtisches über jeder Ecke der Figur ABCD, auf dem Meßtische bekömt, die Figur ABCD mag so viel Ecken haben, als man will: hier würden z. E. bey der 4ten Station D, die Punkte a, b, c, d, die 4 zurückgelegten Stationen des Meßtisches über A, B, C, D, ausdrücken.

Anmerkungen über dieses Verfahren.

§. 230. I. Es ist klar, daß wenn man anfangs noch mehrere, als zwey, innerhalb der Figur ABCD liegende Objekte, auf dem Meßtische entworfen hätte, alsdenn ein jedes von diesen Objekten, zur Bestimmung der Stationen c, d u. s. w. hätte dienen können. — Und da alle Richtungslinien wie rR, mM u. s. w. in einem und demselben Punkt c, oder d u. s. w. zusammentreffen müssen, wenn während der Arbeit, keine Fehler vorgefallen sind, so dienen

mehrere Objekte nicht allein zur Prüfung der Arbeit, sondern auch dazu, daß man in der Arbeit nicht aufgehalten wird, wenn man beym Fortgange derselben, ein oder das andere Objekt aus dem Gesichte verliehren solte.

II. Wenn es sich eräugnet, daß sich nicht völlig genau alle Richtungslinien, wie Mm, Rr u. s. w. in einen und denselben Punkt c, d, u. s. w. schneiden, so zeigt dieses einen Fehler an, der entweder daher rühret, weil man aus der anfänglichen Standlinie AB, die Objecte R, M, nicht richtig zu Papiere gebracht hat, oder weil man nicht an jeder folgenden Station den Meßtisch sorgfältig nach der vorhergehenden eingerichtet hat. In diesem Falle wählt man den Punkt, in dem sich die meisten Richtungslinien Mm, Rr u. s. w. schneiden, oder man bestimmt unter den verschiedenen Durchschnittspuncten einen mittlern, den man für den wahren annimmt, und folglich dadurch den Fehler einigermaaßen corrigirt. Wenn aber die Durchschnitte gar zu weit von einander fallen, so muß ein beträchtlicher Fehler irgend an einer Station vorgefallen seyn, und ich rathe daher, lieber nach den vorhergehenden Stationen wieder zurückzugehen, und die Arbeit noch einmahl vorzunehmen. — Gewöhnlich wird man den Fehler in der nächstvorhergehenden Station entdecken.

III. Das gewiesene Verfahren, aus dem Umkreise eine Figur zu Papiere zu bringen, ist ausserordentlich bequem, und giebt, wenn die Figur aus sehr vielen Ecken bestehet, am Schluße derselben, selten einen so grossen Fehler, als die gewöhnliche Methode, wo man alle Seiten ringsherum misset. — Die Bequemlichkeit, daß man nur eine einzige Standlinie, aus der man die Objecte innerhalb der Figur bestimmt, messen darf, ist in solchen Fällen, wo der Umkreiß nicht aus lauter Horizontallinien bestehet, um desto mehr zu empfehlen, da man, wenn nur an jeder Station der Meßtisch horizontal stehet, auch sogleich die auf den Horizont proiicirte Figur auf dem Meßtische erhält, da im Gegentheile, die gewöhnliche Methode, wegen der vorzunehmenden Reduction der gemessenen Umfangslinien auf den Horizont, sehr mühsam wird, und selbst zu großen Fehlern Gelegenheit geben kan.

Freylich schränkt sich diese Methode, nur auf solche Figuren ein, innerhalb deren man kenntliche Objekte vorfindet; allein in eben solchen Fällen ist sie vortheilhaft z. E. wenn man Städte aus ihrer Peripherie zu Papiere bringen soll; da würden Thürme, oder andere hohe Gebäude sehr gut zu solchen Objekten wie R, M, dienen.

Dieser Methode habe ich mich in meinen Vorlesungen über die pract. Geometrie, oft bedient,

die Figur des Walles um Göttingen zu entwerfen. Der Umkreiß von Göttingen bestehet aus mehr als 50 Winkeln und eben so viel Linien, darunter einige ziemlich lang sind — allein in einer Zeit von 6 Stunden bin ich allemahl damit fertig geworden, da ich nach der gewöhnlichen Messung aus der Peripherie, fast 4 mahl so viel Zeit dazu brauchte.

IV. Endlich ist es nicht nothwendig, daß die Objekte R, M, gerade innerhalb der Figur liegen; kan man außerhalb derselben auch Gegenstände, die hierzu geschickt sind, antreffen, so werden sie zur Bestimmung der Figur gleiche Dienste leisten.

Aufgabe.

§. 231. Aus einer willkürlich angenommenen Standlinie FG Fig. LXXVII. Tab VI so viel Punkte A, B, C, D, E, einer Figur auf dem Felde, zu Papiere zu bringen, als man will, oder eine Figur aus einer Standlinie aufzunehmen.

Aufl. Diese Aufgabe ist völlig mit der einerley, die wir im 184 §. zur Messung der Weiten gebraucht haben, und ist im Zusammenhange kurz auf folgende Art zu bewerkstelligen.

Man bringe über F, den Meßtisch, stelle ihn wie gewöhnlich horizontal, und ziehe aus dem loth-

lothrecht über F liegenden Punkte f, nach allen Objekten A, B, C, D, E, wie auch nach G, die Richtungen fα, fβ, fγ, fδ, fε, fχ.

II. Es verstehet sich, daß die Objekte A. B, C, u. s. w. gewisse Nahmen haben, oder mit Nummern bezeichnet worden sind. — Man schreibe also ihre Nahmen, oder Nummern ebenfalls, an die nach ihnen hingezogenen Richtungen, fα, fβ, u. s. w. An die Richtung fχ der Standlinie schreibe man gleichfalls ein beliebiges Zeichen.

III. Nachdem man nun die Standlinie FG gemessen, sie auf die entsprechende Richtung fχ von f nach g getragen, hierauf den Meßtisch, mit den bey Nro. 1. darauf gezogenen Linien, über G bey Nro. 2 so gestellet hat, daß g über G, und gf längst GF eingerichtet worden, so ziehe man aus g bey Nro. 2 abermahls nach allen Gegenständen A, B, C u. s. w. Richtungslinien ga, gb, u. s. w.

Wo nun die nach A ausgezogene Richtung ga, die bey der ersten Station dahin gezogene und nach (II) bemerkte Richtung fα durchschneidet, da wird sich die Lage des Objekts A, auf dem Meßtische durch a bestimmen, dergestalt, daß a gegen gf, eben die Lage haben wird wie A gegen GF. Auf gleiche Weise, geben die Durchschnitte b, c, d, e, der nach den Objekten B,

C, D, E hingezogenen Richtungen fβ, gb; fγ, gc; u. s. w die Lagen dieser Objekte B, C, D, E gegen die Standlinie FG an, so daß die auf dem Meßtische erhaltenen Punkte a, b, c, d, e, gegen fg, eben so liegen werden wie A, B, C, D, E, gegen FG, und durch gerade Linien ab, bc, cd u. s. w. verbunden, auf dem Meßtische eine Figur abcde geben werden, die der ABCDE vollkommen ähnlich ist.

Der Beweis hiervon läst sich kurz so abfassen.

Weil vermöge (§. 184) die Weiten bc, cd, bd, denen BC, CD, BD gemäß sind oder weil vielmehr überhaupt

BC : CD = bc : cd
BC : BD = bc : bd

ist, so ist das Dreyeck bcd, dem Dreyeck BCD ähnlich; also der Winkel bcd = BCD; auf gleiche Weise thut man dar, daß die Winkel CDE = cde; DEA = dea u. s. w. sind. Die Figur abcde, hat also an ihrem Umfange eben die Winkel, als die Figur ABCDE, und sie folgen auch in eben der Ordnung auf einander, da nun auch nach der Ordnung die Weiten bc, cd, de, ea, ab, denen BC, CD, DE, EA, AB gemäß sind, so muß die Figur abcde, der ABCDE ähnlich seyn.

Zus. Durch dieses Verfahren sind auch die Weiten fb, fc, fd, u. s. w. denen Entfernungen

FB,

FB, FC, FD u. s. w. gemäß. Wodurch man also zugleich jedes Objekts Weite von den Standpunkten F, G, findet.

Anmerkungen.

§. 232. I. Diese Aufgabe ist von sehr großen Nutzen, und fast die vorzüglichste deren man sich bey Entwerfung ganzer Landschaften mit Vortheil bedienen kan, besonders wenn man, statt des Meßtisches das Astrolabium gebraucht, und damit auf eine ähnliche Art zu Werke gehet, wie die Folge ausweisen wird. Sie wird vorzüglich gebraucht, die Hauptpunkte einer Landschaft; z. E. Dörfer, Bergspitzen, Städte u. s. w. zu entwerfen, und hat die Bequemlichkeit, daß man nicht nöthig hat von einem Orte nach dem andern würklich hinzugehen, sondern nur eine einzige Standlinie zu messen braucht. Zugleich erhält man, die Projection der Figur ABCDE auf die Horizontalfläche, wenn an jedem Standpunkte F, G, nur der Meßtisch horizontal gestellet worden.

II. Wenn die Objekte A, B, C u. s. w. sehr weit von einander entlegene Punkte einer Landschaft vorstellen, so muß man freylich den Maaßstab, womit man die Standlinie aufträgt sehr klein annehmen, wenn nicht die Durchschnittspunkte a, b, c, d, e, außerhalb des Meßtisches fallen sollen. In solchen Fällen mögten wohl die Un-

terabtheilungen in Fuße ꝛc. wegfallen, weil sich solche in einen unsichtbaren Punkt verliehren würden. Allein eben bey so großen Vermessungen kömt es auf solche Kleinigkeiten, dergleichen Fuße und Zolle sind, nicht an, da man oft genöthigt ist, eine und mehrere Ruthen für einen Punkt gelten zu lassen.

III. Die Standlinie braucht eigentlich nur in dem Falle würklich gemessen zu werden, wenn man auf dem Meßtische, ausser der Lage der Punkte a, b, c, d, e gegen einander, auch ihre Entfernungen verlangt.

Verlangt man bloß die Lage der Objekte A, B, C, D, E gegen einander, so braucht man die Standlinie nicht wirklich zu messen — weil das Verfahren des 184 §. mithin auch des 231 §, welches aus jenem herfliesset, eine willkürliche Standlinie zum vorausetzt, folglich sich auf keine bestimmte Größe derselben einschränket; und da der verjüngte Maaßstab, gleichfalls willkürlich ist, so kan man auch fg, von beliebiger Länge nehmen; denn es läst sich allemahl ein verjüngter Maaßstab gedenken, auf dem fg so viele Theile halten würde, als die willkürliche Standlinie nach der Meßkette hält.

IV. Die Richtigkeit der ganzen Operation hängt davon ab, daß über der zwoten Station Nro. 2. die Linie gf so genau als möglich längst

der

der Standlinie GF eingerichtet werde, und sich während, daß man aus g nach den Objekten A, B, C, u. s. w. visiret, nicht aus ihrer Lage verrücke. Um also während der Arbeit sich von dem unverrückten Stande des Meßtisches zu versichern, so muß man entweder unterweilen, die dioptrische Regel an gf legen, und zurück nach der Station F visiren, oder man muß an dem Meßtische mit einem Versicherungsfernrohre (§. 131) versehen seyn.

V. Wenn solchergestalt alles seine gehörige Richtigkeit hat, und gf genau längst GF gestellet ist, so sind nach (§. 184 Zus.) alle Linien fb, fa, bc, cd u. s. w. den correspondirenden Linien FB, FA, BC, CD, u. s. w. parallel.

VI. Es ist nicht nöthig daß man aus g, würklich die Linien gb, gc, u. s. w. ausziehet — sondern man braucht, nur da, wo die dioptrische Regel, die Linien fβ, fγ u. s. w. schneidet, die Durchschnitte b, c, mit einer Zirkelspitze zu bemerken. — Dies dienet, Verwirrungen zu vermeiden, die sonst die vielen Linien gar leicht verursachen könten.

VII. Die richtige Wahl der Standlinie FG, trägt auch sehr vieles dazu bey, die Folge der im Visiren oder in der Stellung des Meßtisches begangenen Fehler zu vermindern, und daher dienen die im XVII. Kapitel hieher gehörigen

Errin-

Errinnerungen. Man muß daher, wenn eine Standlinie wie FG nicht zureichet, alle Punkte A, B, C, D u. s. w. mit mäßiger Richtigkeit auf dem Meßtische zu entwerfen, mit ihr eine andere Standlinie verbinden, aus der man diejenigen Punkte entwirft, die gegen die erste eine zu unbequeme Lage hatten. Ueberhaupt muß man bey Entwerfung großer Districte immer mehrere Standlinien zu Hülfe nehmen, theils, weil eine einzige Standlinie nicht zureichend seyn würde, eine große Menge sehr weit wegliegender Objekte auf einmahl zu Papiere zu bringen, ohne den Maaßstab gar zu klein anzunehmen, theils auch weil eine Standlinie nicht gegen alle Objekte eine gleich vortheilhafte Lage hat. Es müssen aber die einzeln Standlinien mit einander oder mit bereits entworfenen Punkten zusammenhängen, damit sich nachher die einzeln entworfenen Theile einer Landschaft mit einander verknüpfen lassen. — Was aber hiebey noch zu merken, und wie man verfahren müsse, die einzeln Entwürfe, ohne sich zu irren, richtig in Verbindung zu bringen, davon werde ich im folgenden Theile dieses Buches umständlicher handeln.

VIII. Wenn man bey der Station Nro. 1 nachdem die Visirlinien fα, fβ u. s. w. gezogen worden, den Meßtisch in unverrückter Lage läßt, und auf ihm auch die Richtung der Magnetnadel $\mu\nu$ verzeichnet, (§. 121) und nun bey Nro. 2 den

Meß-

Meßtisch so stellet, und wendet, daß die Magnetnadel, der an $\mu\nu$ gelegten dioptrischen Regel, über der Nordlinie, auf dem Boden des Magnetkästgens wieder einspielet, so werden nicht allein die beyden Richtungen $\mu\nu$ bey Nro. 1 und Nro. 2, sondern auch bey Nro. 2 alle Linien auf dem Meßtische wie ab, bc, cd, fb u. s. w. den entsprechenden Linien AB, BC, CD, FB u. s. w. auf dem Felde parallel seyn. — Dies drückt man so aus, daß man sagt, bey Nro. 2 habe der nach der Magnetnadel eingerichtete Meßtisch eine Lage, die mit der, bey Nro. 1 parallel ist.

Dieser Satz, den Meßtisch an jeder Station vermittelst der Magnetnadel, in eine Lage zu bringen, die mit einer der vorhergehenden Stationen parallel ist, wird uns den Weg zu folgender Aufgabe zeigen, welche bey geodätischen Messungen von vorzüglicher Brauchbarkeit ist.

Aufgabe.

§. 233. Wenn man nach der Aufgabe des 231 §. bereits einige Objekte auf dem Felde zu Papiere gebracht hat, alsdenn die Lage jeder Station, wo man den Meßtisch hinbringt, gegen diese Objekte zu bestimmen.

Aufl. Fig. LXXVI. Es seyen S, R, M Gegenstände auf dem Felde, und AB, die angenommene Standlinie; also Nro. 1, Nro. 2 die beyden

den Stände, aus denen man die Objecte S, R, M, nach der vorhergehenden Aufgabe zu Papiere gebracht hat, so daß die bey Nro. 2 erhaltenen Punkte s, r, m, auf dem Meßtische die Objekte S, R, M vorstellen.

$\mu\nu$ sey die Richtung der Magnetnadel, die man auf dem Meßtische bey Nro. 1 gezogen hatte; es verstehet sich daß man bey Nro. 1, sowohl alle Visirlinien wie $a\varrho$, $a\mu$ u. s. w. als auch die Lage der Magnetnadel $\mu\nu$ gegen dieselben, bey unverrückter Stellung des Meßtisches gezogen haben muß.

Es stelle nun Nro. 3 eine dritte Station des Meßtisches vor; um nun die Lage dieser Station, gegen die Objekte S, R, M zu bestimmen, so lege man an die Richtung der Magnetnadel $\mu\nu$, das Diopterlinial, drehe den Meßtisch so lange horizontal herum, bis die Magnetnadel über der Nordlinie einspielt. — In dem Augenblicke da dieses geschiehet, erhält der Meßtisch bey Nro. 3 eine Lage, die mit der bey Nro. 1 und Nro. 2 gehabten, parallel ist. — In dieser Lage bleibe nun der Meßtisch unverrückt; man lege an r, s, m, das Diopterlinial, und visire nach den zugehörigen Objekten R, S, M, so werden die rückwärts verlängerten Richtungslinien Rr, Ss, Mm, sich insgesamt, auf dem Meßtische in einem und denselben Punkt c

schneiden wie im 230 §, und dieser Punkt c wird auf dem Papiere die Station des Meßtisches bey Nro 3 vorstellen, dergestalt, daß wenn C, lothrecht unter c liegt, die Lage der Punkte C, R, M, S auf dem Felde, durch die c, r, m, s auf dem Meßtische angegeben wird. Dies erhellet daraus.

Weil bey Nro. 3 der Meßtisch eine parallele Lage mit Nro 2 erhalten hat, so sind bey Nro. 3, sowohl die Linien br, bm, bs, als auch sm, rm, sr, den entsprechenden Linien, BR, BM, BS, SM, RM, SR, parallel.

Weil also sr parallel mit SR, und rm parallel mit RM, und die Punkte S, s, c; M, m, c; in geraden Linien liegen, so ist das Dreyeck src dem Dreyecke ScR, oder eigentlich SCR ähnlich, und auf eben die Art das Dreyeck rcm dem Dreyeck RCM ähnlich. Uebrigens ist auch das Dreyeck srm dem SRM ähnlich; dies giebt also die Proportionen

$$SC : sc = SR : sr = RM : rm$$
$$RC : rc = Rm : rm$$
$$MC : mc = RM : rm$$

also $SC : sc = RC : rc = MC : mc$

d. h. die Weiten SC, RC, MC, sind denen sc, rc, mc, proportional; da nun auch die Winkel $SCR = scr$, $RCM = rcm$ so siehet man

leicht

leicht, daß die Punkte s, r, m, gegen c eben die Lage haben müssen, die S, R, M, gegen C haben.

Auf gleiche Weise erhellet, daß wenn in der Station bey Nro. 4 der Meßtisch wieder nach der Magnetnadel gestellet, hierauf an r, m, s, das Diopterlinial gelegt wird, sich die verlängerten Richtungslinien Rr, Mm, Ss, in d durchschneiden, und solchergestalt durch d, den Stand des Meßtisches bey Nro. 4 auf demselben bestimmen werden.

Und so kan man auf dem Felde jeden Punkt, wo man den Meßtisch hinstellet, auf dem Meßtische bestimmen, und solchergestalt auch auf eine gar leichte Art, Figuren aus ihrem Umfange zu Papiere bringen, ohne daß man nöthig hat, wie bey den Aufgaben des 222 und 230 Hes den Meßtisch durchs Zurückvisiren nach den vorhergehenden Stationen einzurichten, und solchergestalt einen zusammenhängenden Faden der Vermessung zu verfolgen.

Anmerkungen.

§. 234. I. Es erhellet daß, beym Fortgange einer Messung, selbst die Punkte wie B, C, wieder zu neuen Richtpunkten dienen können. Hätte man z. B. bey der Station Nro. 4 die Gegenstände S, R, M aus dem Gesichte verlohren,

ren, könte aber nur einige der vorhergehenden Stationen z. E. B, C, sehen, so würde man den Punkt d demohnerachtet bestimmen können, wenn man in diesen Stationen B, C, Signale zurückgelassen hätte; denn man dürfte, nachdem der Meßtisch nach der Magnetnadel gestellet worden, die dioptrische Regel nur an b, c, legen, und nach B, C, visiren, so würden die verlängerten Richtungen Bb, Cc, gleichfalls den Punkt d bestimmen.

II. Auf diese Art erhellet, daß man eine Messung sehr weit ausdehnen kan, ohne daß es nöthig ist, sehr viele Stand- und andere Linien unmittelbar zu messen — und man hat den Vortheil, daß sich an jedem Orte, wo man den Meßtisch hinbringt, und wo man zwey oder mehrere von den bereits auf dem Meßtische bestimmten Objecten sehen kan, die Messung weiter fortsetzen läst.

III. Ein anderer Vortheil bey dieser Vermessungsart ist, daß, wenn nur die aus der Standlinie AB, festgelegten Objekte R, S, M, ihre gehörig richtige Lage auf dem Meßtische erhalten haben, man nicht so leicht besorgen darf, daß sich beym Fortgange der Messung die Fehler häufen, oder sich von einer Station, auf die nächstfolgende fortpflanzen. — Man vergleiche hiemit nur die gewöhnliche Art, eine Fi-

gur aus ihrem Umfange zu entwerfen. Ein Fehler den man z. E. in der Station B im Visiren begangen hat, pflanzt sich, wenn man bey C den Meßtisch durchs Zurückvisiren nach B einrichtet, auf den Gegenstand C, und von da weiter auf D fort, weil man einen beständigen Faden der Vermessung verfolgt — Allein wenn man die Punkte C, D nach der Methode des 233 §. entwirft, so pflanzt sich der auch etwa bey C begangene Fehler nicht auf D fort, außer nur in dem Falle, wenn man C zu einen neuen Richtpunkt, wie in (I) gebrauchen wolte; so lange man sich aber bloß der richtig entworfenen Objekte S, R, M, zu Richtpunkten bedienet, hat man keine Anhäufung der Fehler zu besorgen.

Wenn R, M, S, Gegenstände sind, die man auf eine beträchtliche Weite sehen kan, so wird man vermittelst derselben, eine große Strecke Landes aufnehmen können, und dann erhellet, daß die gewiesene Methode bey Landesvermessungen von sehr großem Nutzen ist.

Uebrigens ist es vortheilhaft, anfangs aus der Standlinie AB, so viel Objekte zu Papiere zu bringen als möglich, weil doch beym Fortgange einer Messung immer einige sich wieder aus dem Gesichte verliehren. — Und wenn man aus Besorgniß, daß sich die Fehler anhäufen mögten, sich nicht der bereits entworfenen Stationen,

tionen, wie C, B wieder zu neuen Richtpunkten bedienen will, so kan man ja immer eine neue Standlinie messen, und aus ihr, Objekte zu fernern Richtpunkten, auf dem Meßtische entwerfen.

Nöthige Erforderniß bey dieser Messungsart, und Mittel die Magnetnadel zu entbehren.

§. 235. Die wichtigste Voraussetzung ist bey dieser Messungsart, wie leicht erhellet, diese: daß die Magnetnadel ihre gehörige Vollkommenheit und Empfindlichkeit habe (§. 120). Denn wenn dieselbe z. E. faul wäre, so würden auf dem Meßtische, welchen man nach einer solchen Nadel richten wolte, die Linien, wie rs, rm (Nro. 3) nicht den zugehörigen Linien auf dem Felde, RS, RM parallel werden, und darauf gründet sich doch das wesentliche dieser Methode. — Da nun sowohl wegen der Unvollkommenheit der Magnetnadel, als auch wegen anderer zufälligen Ursachen, gar leicht die wahre Richtung der Magnetnadel verändert wird, auch selbst beym Forttragen der dioptrischen Regel von einer Station zur andern, wenn man nicht sehr vorsichtig zu Werke gehet, gar leicht der Stift auf dem sich die Nadel drehet, etwas schadhaft werden kan, so sind in so ferne, bey dieser Methode, freylich auch Unbequemlichkeiten und Irrthümer zu besorgen, die insgesamt

wegfallen würden, wenn man Mittel hätte, die Magnetnadel völlig zu entbehren.

Dieses Mittel wäre nun selbst dasjenige, welches wir oben bey Gelegenheit der Branderischen Auflösung der Aufgabe des 187 §es beygebracht haben. Nur kan man vermittelst dieser Aufgabe, eine ganze Figur, auf dem Meßtische selbst nicht in ihrem Zusammenhange erhalten, sondern man muß ein anderes mit Papier überspantes Reisbrett mit sich führen, wo man die jedesmahl einzeln auf dem Meßtische bestimmten Punkte, von dem Meßtische abträgt, und sie in gehörige Verbindung mit den übrigen bringt.

Die Art dieses zu bewerkstelligen ist kurz diese.

Es stelle Q Fig. LXXVI ein Reisbrett vor. — So bald nun aus der Standlinie AB, die Objekte S, R, M, durch s, r, m auf dem Meßtische entworfen worden, so trage man die auf dem Meßtische bey Nro 2 befindliche Standlinie ab, auf das Reisbrett Q, fasse hierauf von dem Meßtische die Seiten am, bm, und bestimme, mit denselben auf dem Reisbrette Q, den Punkt m, indem man mit am, bm, aus den Punkten a, b, ein paar sich bey m durchschneidende Kreisbogen beschreibt; auf gleiche Weise werden die Punkte s, r, von dem Meßtische auf das Reisbrett Q gebracht.

Nun begebe man sich mit dem Meßtische und Reisbrette nach der Station Nro. 3; und ohne sich um etwas weiter zu bekümmern, ziehe man aus einem willkürlich auf dem Meßtische angenommenen Punkt c, nach S, R, M, Richtungslinien cυ, cp, cq; fasse nun mit einem dreyfüßigten Zirkel von dem Reisbrette das Dreyeck srm, und trage es nach der Branderischen Methode §. 187 auf den Meßtisch Nro. 3 dergestalt, daß jeder Punkt s, r, m auf die den Objekten S, R, M entsprechende Richtungslinien cυ, cp, cq zu liegen komme, so wird die Lage des Punktes c, gegen s, r, m, vollkommen bestimmt seyn. Man fasse nun von dem Meßtische Nro 3, zwo solchergestalt bestimmte Entfernungen sc, mc, und beschreibe damit, aus den zugehörigen Punkten s, m, auf dem Reisbrette Q, ein paar sich bey c durchschneidende Kreisbogen, so hat man den Punkt c von dem Meßtische, auf das Reisbrett getragen, und c auf dem Reisbrette wird dadurch auch zugleich seine richtige Lage gegen die Standlinie ab, bekommen. Nachdem auf eben die Art bey Nro. 4 aus einem willkürlichen Punkte d nach den Objekten S, R, M, Richtungslinien gezogen, und auf dieselben, vermittelst des dreyfüßigten Zirkels die Punkte s, r, m, getragen, und folglich die Weiten sd, rd, md, dadurch bestimmt worden, so beschreibe man wieder z. E. mit md, rd, auf dem Reisbrette, aus den Punkten m, r,

ein paar sich bey d durchschneidende Kreisbogen, so wird auf eben die Art d auf dem Reisbrette, nicht allein seine richtige Lage, gegen r, s, m, sondern auch gegen die bereits festgelegten Stationen a, b, c erhalten.

Und so erhellet wie man nach und nach, die Lage aller Punkte S, R, M, A, B, C, D, auf das Reisbrett Q, bringen könne; ob man gleich bey jeder einzeln Station, auf dem Meßtische nur diese Station für sich, und ohne Verbindung mit den übrigen erhält.

Es ist klar, daß man bey dieser Methode, weiter gar keine Richtung und Wendung des Meßtisches von Nöthen hat, als blos die Horizontalstellung desselben, und daß man dabey allen zufälligen Unrichtigkeiten der Magnetnadel ausweichet. Es scheinet zwar das wechselsweise Abtragen, der Richtungspunkte s, r, m von dem Reisbrette, auf den Meßtisch, und dann des bestimmten Punktes von dem Meßtische auf das Reisbrett, einigermaaßen weitläuftig zu seyn, allein ich kan versichern, daß dieses Verfahren einem einigermaaßen geübten, nicht viel weitläuftiger vorkommen wird, als die Richtung des Meßtisches nach der Magnetnadel, wo doch auch immer einige Zeit verfließet, ehe die Magnetnadel gehörig einspielet und in Ruhe kömt. — Auch werden einem geübten leicht verschiedene Vor-

theile und Vorsichten einfallen, die ich der Kürze halber übergehen muß.

Sollen also Objekte oder Stationen auf dem Felde mit ungleich mehrerer Richtigkeit zu Papiere gebracht werden, als es vermittelst Gebrauchs der Magnetnadel geschehen kan, so wird man sich immer lieber der Branderischen Methode bedienen. Indessen, wo die auf dem Meßtische entworfenen Stationen nicht wieder zu neuen Richtpunkten dienen sollen, da ist der Gebrauch der Magnetnadel bequem und zureichend.

Fehler welche daher entstehen, wenn man die Richtungen der Magnetnadel, an unterschiedenen Orten, als parallel annimt.

§. 236. 1. Die Voraussetzung, worauf sich das bisherige gründet, nemlich, daß die Richtungen der Magnetnadel völlig genau parallel sind, ist eigentlich nur beynahe wahr, kan aber ohne großen Fehler angenommen werden, sobald die Oerter auf der Erdfläche nicht gar zu weit von einander liegen. Hingegen, je mehr die Oerter auf der Erdfläche von einander entfernt sind, oder vielmehr je größer der Unterschied ihrer Mittagskreise ist (§ 117. IV) desto mehr müssen auch die Richtungen der Magnetnadel von ihrer parallelen Lage abweichen. — Und wenn daher, an

einem gewissen Orte, auf dem Meßtische die Richtung der Magnetnadel gezogen worden ist, und man an einem andern, von dem ersten ziemlich weit entfernten Orte, den Meßtisch nach der darauf gezogenen Richtung wieder stellen wolte, so würde solcher an der letztern Station, nicht mehr ohne einigen Fehler zu begehen, eine parallele Lage, mit der am ersten Orte gehabten Lage erhalten, mithin würden auch die aus letzterer Station entworfenen Punkte, nicht mehr ihre richtige Lage, gegen die aus der ersten Station des Meßtisches entworfenen Punkte erhalten.

2. Um das bisherige mehr ins Licht zu setzen, und zu sehen, auf welche Art man verfahren müste, wenn es nöthig wäre, den Fehler zu verbessern, der aus der Voraussetzung, daß die Richtungen der Magnetnadel gleichlaufend sind, herrührte, so wollen wir noch kürzlich folgende Betrachtungen beyfügen.

3. Es seyen Fig. LXXVIII A, D zween Oerter auf der Erdfläche, und Aa, Dd, deren Mittagslinien, die man ohne merklichen Fehler, in einer einzigen Ebene annehmen kan, so lange das Stück Erdfläche zwischen A und D, keine merkliche Krümmung hat.

4. Weil nun die Erfahrung lehret, daß die Declination der Magnetnadel, auch an Oertern die z. E. 10 und mehrere Meilen von einander liegen,

liegen, ohne großen Irrthum einerley ist, so werden, wenn A μ, D ν, die Richtungen der Magnetnadel an solchen Oertern vorstellen, die Winkel oder Abweichungen a A μ, d D ν, ohne Irrthum einander gleich seyn.

5. Unter welchen Umständen man also die Mittagslinien Aa, Dd, als parallel ansehen kan, unter eben den Umständen, kan man auch, wegen der gleich großen Winkel μ A a, ν D d, die Richtungen der Magnetnadel A μ, D ν, als gleichlaufend betrachten. —

6. Diese Umstände sind, wenn A, D, ziemlich nahe neben einander liegen.

7. Nun ist aber aus der Geographie bekant, und es läst sich durch eine leichte Rechnung zeigen, daß wenn der Abstand der beyden Mittagslinien Aa, Dd, wenige Meilen beträgt, die Abweichung der Mittagslinien von ihrer parallelen Lage, schon merklich wird, und dies rühret daher, weil sich dieselben gegen den Pol zu neigen.

8. Man stelle sich durch D, mit A μ, Aa, die parallelen D λ, D α, vor, so ist klar daß der kleine Winkel d D α die Abweichung der beyden Mittagslinien Aa, Dd, von der parallelen Lage, ausdrücken werde.

9. Auch erhellet, daß, wegen der gleichgroßen Winkel $\nu D d$, $\lambda D \alpha$, der kleine Winkel $\nu D \lambda$ $=$ $d D \alpha$ seyn werde, mithin die beyden Richtungen der Magnetnadel $A \mu$, $D \nu$, von der parallelen Lage so viel abweichen werden, als die beyden Richtungen der Mittagslinien Aa, Dd, davon abweichen.

10. Gesetzt nun an dem Orte A, sey die Messung einer Gegend angefangen, und auf dem Meßtische daselbst, die Richtung der Magnetnadel $A \mu$ gezogen worden, so wird diese $A \mu$ in die Lage $D \nu$ kommen, wenn man an dem Orte D, die Magnetnadel über der bey A auf dem Meßtische erhaltenen Nordlinie einspielen lässet. Aber der solchergestalt nach $D \nu$ eingerichtete Meßtisch, wird keine parallele Lage, mit der bey der Station A gehabten Lage erhalten, weil $D \nu$, nicht mit $A \mu$ gleichlaufend ist. Man müste eigentlich an $D \nu$, oder an die bey der ersten Station des Meßtisches gezogene Nordlinie, den kleinen Winkel $\nu D \lambda$ setzen, der so groß wäre, als der $d D \alpha$, oder als die Neigung der beyden Mittagslinien Aa, Dd, gegeneinander, und müste alsdann die Magnetnadel über der Linie $D \lambda$ einspielen lassen, um den Meßtisch bey D, mit dessen gehabten Stande bey A, parallel zu stellen.

11. Solchergestalt ließe sich an jedem Orte D gar leicht der correkte Stand des Meßtisches erhalten,

halten, wenn man nur den kleinen Winkel ϒDλ oder dDα wüste.

Diesen in jedem Falle zu berechnen dient folgendes.

12. Man fälle von D auf die Mittagslinie durch A, eine perpendiculäre Dδ, und durch A, AL mit Dδ parallel, so sind Dδ, AL, als Stücken der Parallelkreise anzusehen, in denen die Oerter A, D, liegen, und Aδ ist der Abstand dieser Parallelkreise, mithin der Unterschied der Breiten (§. 117. VI) der Oerter A, D.

Man nenne Aδ = b, Dδ = a; man kan wie ich hernach zeigen werde, b, a, als gegebene Grössen ansehen.

AK, Dδ, sind Stücke von Parallelkreisen, zwischen zweenen Mittagskreisen; weil nun A näher beym Pole als D angenommen wird, oder weil die geographische Breite von A um Aδ, größer ist, als die geographische Breite von D, so ist aus der Natur der Parallelkreise leicht einzusehen daß AK kleiner seyn müsse als Dδ und zwar in dem Verhältniß, in welchem der Halbmesser des Parallels AK, kleiner ist als der Halbmesser des Parallels Dδ.

Aber aus einer zu dieser Absicht entworfenen Figur läst sich gar leicht darthun, daß die Halb-

messer

messer der Parallelkreise, sich wie die Cosinusse, der Breiten verhalten. — Nennt man also die Breite des Orts A = β, mithin die Breite des Orts D = β — b (wo man die Entfernung b (12) in einen Bogen verwandeln muß) so ist

$$AK : D\delta = \cos\beta : \cos(\beta - b) \text{ also}$$

$$AK = \frac{\cos\beta \cdot D\delta}{\cos(\beta - b)}$$

13. Hat man nun vermittelst dieser Proportion AK gefunden, so hat man auch den Unterschied $D\delta - AK = AL - AK = KL$, und in dem kleinen rechtwinklichten Dreyecke KDL findet man aus der berechneten KL, und der gegebenen LD oder $A\delta$, gar leicht den kleinen Winkel KDL also die Abweichung der beyden Mittagslinien Dd Aa, von der parallelen Lage, mithin auch die Abweichung der Nordlinien $A\mu$, $D\nu$ von der parallelen Lage.

14. Man braucht aber, um bey D den correcten Stand des Meßtisches zu erhalten den kleinen Winkel KDL nicht würklich zu berechnen, sondern verfährt kurz auf folgende Art. Man nehme auf der Nordlinie $D\nu$ des Orts D, eine Länge $Dr = DL = A\delta$, und setze durch r, auf $D\nu$, eine kleine Perpendiculärlinie ri, so groß als die berechnete KL (13) ziehe durch D und i eine gerade Linie $D\lambda$, so ist auf dem Meßtische diese $D\lambda$ diejenige Richtung, über der man die

Magnet-

Magnetnadel einspielen lassen muß, um bey D den Meßtisch, mit der bey A gehabten Lage parallel zu stellen.

15. Wir müssen nun noch zeigen wie man die in obiger Rechnung gebrauchten Größen Aδ, Dδ, wenigstens so genau, als zu gegenwärtiger Absicht nöthig ist, bestimmen könne.

16. Man stelle sich vor, A, D, seyen mit den Oertern A, D der LXXVI Figur einerley, a, d Fig. LXXVI. Nro. 4, seyen die nach dem 233 §. entworfenen Oerter A, D;

Ob nun zwar gleich die Station d nicht ihre vollkommen richtige Lage auf dem Meßtische haben wird, weil man bey Nro. 4 den Meßtisch nach der bey Nro. 1 gezogenen Richtung der Magnetnadel $\mu\nu$ eingerichtet hat, mithin der Meßtisch bey Nro. 4 nicht eine vollkommen parallele Lage mit Nro. 1 hat, so wird doch der Punkt d, so genau auf dem Meßtische Nro. 4 bestimmt seyn, als zu gegenwärtiger Absicht nöthig ist.

Man stelle sich also durch a mit der an dem Orte A gezogenen Nordlinie $\mu\nu$, eine parallele ai vor, (welches bloß deswegen geschiehet damit die Nordlinie des Orts A, selbst durch den, den Ort A vorstellenden Punkt a gehe). Man setze an ai die Abweichung der Magnetnadel des Orts A,

der-

dergestalt, daß ap die Mittagslinie des Orts a vorstelle. Man fälle nun von d auf ap eine Perpendiculärlinie do, so werden die Entfernungen ao, do, auf dem Meßtische nach dem verjüngten Maaßstabe gemessen, die Weiten A∂, D∂ der LXXVIIIFigur so genau als nöthig ist, ausdrücken.

17. Nur ist nöthig daß man die gemessene ao, oder A∂, als den Unterschied der geographischen Breiten beyder Oerter A, D, in einen Bogen verwandele.

Dies geschiehet auf folgende Art;

Weil ein Grad auf dem Mittagskreise Aa Fig. LXXVIII nach (§. 189) 57107,5 paris. Toisen hält, so schliese man, wie 57107,5 Toi. zu der gemessenen Weite A∂ in Toisen, so verhält sich 1 Grad oder 60 Minuten, zu der Anzahl von Minuten, welche auf die gemessene Weite A∂ gehen, und diese gefundene Zahl von Minuten wird alsdenn bey der Berechnung (12) statt des Werthes b gesetzt.

18. Die geographische Breite, oder Polhöhe des Orts A, von dem die Messung angefangen wird, muß übrigens auch ohngefähr, aus einer guten Landkarte, oder sonst irgend woher bekant seyn.

19. Es verstehet sich übrigens, daß man auch wissen müsse, ob in (14) das Perpendikel ri nach Osten zu, wie hier in der Figur, oder nach Westen zu, an die Nordlinie Dv gesetzt werden müsse; dies entscheidet sich aber gar leicht daraus ob der Ort D östlicher oder westlicher als A liegt.

20. Solchergestalt würde es in jedem Falle nicht schwer seyn, die correcte Stellung des Meßtisches zu erhalten.

Im Grunde glaube ich aber immer, daß es unnöthig ist, beym Gebrauche der Magnetnadel, auf die Abweichung derselben von der parallelen Lage zu sehen. — Denn im Ernste wird man doch wohl nicht mit dem Meßtische, sich so weit von dem ersten Standorte A, wo man auf dem Meßtische die Richtung der Magnetnadel gezogen hatte, entfernen, daß es nöthig seyn solte, die Abweichung der Magnetnadel von der parallelen Richtung in Erwegung zu ziehen, da ohnedem aus andern Ursachen der bloße Gebrauch der Magnetnadel, zu größern Fehlern Gelegenheit geben kan, als diejenigen sind, die etwa aus den parallel angenommenen Richtungen der Magnetnadel zu befürchten stehen. Es ist also am besten, daß man die an einer gewissen Station auf dem Meßtische gezogene Richtung der Magnetnadel nicht länger gebraucht, als es

ohne

ohne einen merklichen Fehler zu begehen, verstattet ist, d. h. daß man sich von der ersten Station etwa nicht weiter als höchstens um $\frac{3}{4}$ einer Meile entfernet, und alsdann, anstatt daß man an jedem über diese Gränze hinausliegenden Orte eine Correction nach (14) vornehmen müste, lieber eine neue Standlinie annimmt, an ihr eine neue Richtung der Magnetnadel ziehet, und vermittelst derselben die Messung weiter fortsetzt. Auf solche Art kan man theils die Rechnungen ersparen, die man sonst nach (15) vornehmen müste, theils auch hat man sich ungleich mehrere Richtigkeit zu versprechen, als wenn man sich nur an eine einzige Standlinie binden, und sich der an ihr gezogenen Richtung der Magnetnadel auf eine große Strecke bedienen wolte.

Uebrigens werde ich in der Folge mit mehreren erwähnen, unter welchen Umständen man sich des bisher gelehrten Gebrauchs der Magnetnadel vorzüglich zu bedienen habe.

21. Den Gebrauch der Magnetnadel zur topographischen Aufnahme eines Landes hat vorzüglich Hr. Kap. Hogreve in seiner Anweisung zur topographischen Vermessung eines Landes bekant gemacht, und durch gut gewählte Beyspiele erläutert. — Er hat in dieser nützlichen Schrift eine gute Probe seiner nicht gemeinen Einsichten in die ausübende Geometrie abgelegt.

Aufgabe.

§. 237. Eine Figur zu Papiere zu bringen, wenn man sich der beym Gebrauch der Zollmannischen Scheibe gewöhnlichen Methode dazu bedienen will.

Aufl. Um von dieser Methode kurz einen Begrif beyzubringen, so sey Fig. LXXIX das Viereck ABCD aus dessen Umfange zu entwerfen.

I. Man bringe den Meßtisch über A, und bestimme auf demselben den Punkt m, der lothrecht über A liegt. Lege an m genau das Dioptrlinial, visire nach den Objekten B, D, ziehe durch m die dahin gerichteten Linien qx, py, und bezeichne dieselben, mit den dabey geschriebenen Zahlen 1, 1; 2, 2;

Man mache auch auf die gezogenen Richtungen 1, 1; 2, 2; bey x, y, ein paar Merkmahle, um anzudeuten, daß von den gezogenen Richtungen qx, py, es eigentlich die Stücken mx, my, sind, die aus m nach den Objekten D, B, hinlaufen, oder daß die Objekte D, B, eigentlich nicht auf den Schenkeln mq, mp, sondern auf denen mx, my, liegen müssen; diese Vorschrift beobachte man an jeder folgenden Station.

Nun messe man die Weite AB, die der Richtungslinie 2, 2, zugehört, und schreibe sie in ein bey sich zu führendes Protocoll.

II. Man bringe ferner den Meßtisch über B, so, daß der Punkt in (I) über B, und die Linie 2,2; wieder längst BA zu liegen komme, lege hierauf an m wieder das Diopterlinial, visire nach C, ziehe die dahin gehende, mit den Zahlen 3,3, zu bemerkende Richtung, und mache auf dieselbe bey v ein Zeichen, nach der Vorschrift (I).

III. Nachdem nun die Weite BC gemessen worden, so bringe man den Meßtisch über C, und verfahre wie in (II) an der Station B, dergestalt, daß vermittelst der mit 4, 4, bezeichneten Richtung, der Winkel DCB auf dem Meßtische erhalten werde.

IV. Es erhellet leicht, daß man durch Fortsetzung dieser Arbeit eigentlich jeden Winkel am Umkreise der Figur, auf den Meßtisch an den Punkt m bringt.

Es kömt nun darauf an, aus den Winkeln auf dem Meßtische, und den gemessenen Seiten der Figur ABCD, diese Figur vollkommen auszuzeichnen.

Dieses geschiehet am bequemsten auf folgende Art.

VI. Man schneide das Papier behutsam von dem Meßtische herunter, und klebe es etwa an vier Stellen sorgfältig mit Mundleim, auf das Blatt Papier Q, worauf die Figur ABCD entworfen wer-

werden soll, dergestalt, daß das von dem Meßtische abgenommene Papier glatt und ohne Beulen, auf das untere Blatt Papier Q zu liegen komme.

a sey nun auf diesem Papiere der Punkt, der den A auf dem Felde vorstellen soll.

Man ziehe durch a mit denen auf dem angeklebten Blatt Papiere befindlichen Richtungen 1,1; 2,2; ein paar Parallellinien ad, ab, nach der (§. 64) gewiesenen Methode, vermittelst eines Linials und rechtwinklichten Dreyecks; dergestalt aber, daß ad, ab, aus dem Punkte a nach eben den Richtungen laufen, wie die aus dem Punkte m ausgehenden Stücken mx, my; (I) wozu die auf den Richtungen 1,1; 2,2; bezeichneten Punkte x, y; dienen, so ist der Winkel DAB auf dem Felde, durch dab auf dem Risse entworfen, oder DAB = dab;

Die gemessene Weite AB (I) trage man auf den mit 2,2, parallel gezogenen Schenkel des Winkels dab, von a nach b;

Hierauf ziehe man mit 3,3, durch b eine parallele bc nach der Richtung, nach welcher der auf 3,3; bezeichnete Punkt (II) hinfällt, so hat man den Winkel ABC auf dem Felde, durch abc auf dem Papiere.

Nachdem man endlich die gemessene Weite BC von b nach c getragen, und durch c, mit 4,4, nach der bisherigen Vorschrift eine parallele gezogen, so erhält man auf dem Papiere die Figur abcd, welche der ABCD auf dem Felde ähnlich seyn wird.

Solchergestalt unterscheidet sich dieses Verfahren von dem (§ 222) in weiter gar nichts, als daß man zu Hause erst die Figur zu Papiere bringt, anstatt daß man sie dorten unmittelbar auf dem Meßtische erhielt.

Es ist die Bequemlichkeit dabey, daß man zu Hause die Figur nach einem ziemlich grossen, und der Absicht gemäßen Maaßstab verzeichnen kan, anstatt daß man, wenn die Figur sogleich auf den Meßtisch kommen soll, oft genöthigt ist, einen sehr kleinen Maaßstab anzunehmen.

Wenn der Punkt m ohngefähr in der Mitte des Meßtisches angenommen wird, so erhalten die an m gezeichneten Winkel, ziemlich lange Schenkel, welches demnächst der Richtigkeit im Abschieben der Parallellinien 1,1; 2,2; u. s. w. desto vortheilhafter ist.

Wenn es der Raum auf dem Papiere Q, welches eigentlich auf einem großen Reißbrette aufgezogen seyn muß, nicht verstattet, das ganze Papier von dem Meßtische auf das Reißbrett zu kleben,

kleben, so kan man nur ein Stück von dem Papiere des Meßtisches, das man aus der Mitte m von etwa 5 Zollen im Durchmesser ausschneidet, auf das Reißbrett Q kleben und an einer schicklichen Stelle befestigen. Man muß aber dabey sorgfältig seyn, daß die an die Schenkel geschriebenen Zahlen und Zeichen nicht verlohren gehen.

Das geschickte und fertige Abschieben der Linien auf dem aufgeklebtem Blatt Papiere, an die Winkelpunkte der zu entwerfenden Figur abcd, erfordert einige Uebung und Aufmerksamkeit, wenn man sich nicht dabey irren will.

Uebrigens müssen das Dreyeck und Linial, womit die Parallellinien abgeschoben werden, ziemlich groß seyn, wenn die Arbeit geschwind von statten gehen soll.

Das Verfahren in dieser Aufgabe ist sonst völlig dasjenige, dessen man sich beym Gebrauch der sogenannten Zollmannischen Meßscheibe bedient; und da die runde Gestalt der Scheibe dabey nichts ändert, so habe ich gezeigt, wie der bloße Meßtisch zu eben der Absicht dienet. — Ich glaube aber daß der Meßtisch weit geschickter dazu ist, weil sich das Papier ungleich fester und besser auf demselben aufziehen läst, als auf einer runden Scheibe.

Die übrigen hieher gehörigen Bemerkungen habe ich schon im 1sten Theile (§. 116) beygebracht.

Wie man die Aufgaben des 220, 222, und 231 §. vermittelst des Astrolabii auflösen könne.

§. 238. Ich habe mich bey diesen Aufgaben vorzüglich des Meßtisches bedient, und es läßt sich leicht begreifen, daß wenn man die in diesen Aufgaben vorkommenden Winkel mit dem Astrolabio misset, alsdenn zu Hause gleichfalls die Figuren aufgetragen werden können. — Indessen muß ich aber die Errinnerung beyfügen, daß die Aufgaben des 220 und 222 Ses, sich immer bequemer vermittelst des Meßtisches als des Astrolabii auflösen lassen, theils, weil die Fälle, bey denen diese Aufgaben pflegen angewandt zu werden, beym Gebrauche des Astrolabii ein zu weitläuftiges Diarium erfordern, theils vorzüglich auch deswegen, weil bey diesen Aufgaben selten sehr große Linien vorkommen, und daher immer füglich auf dem Meßtische bewerkstelligt werden können. — Hingegen ist aber bey der Aufgabe des 231 Ses das Astrolabium in dem Falle unumgänglich nothwendig, wenn dieselbe bey der Entwerfung der Hauptpunkte einer ganzen Landschaft, mit gehöriger Richtigkeit ausgeübt werden soll; und man sich also dessen bedienen will, das sogenante Netze oder Gerippe

rippe einer Landschaft zu bestimmen. Denn da bey so großen Vermessungen, die Standlinien, und Standpunkte oft ziemlich weit von einander liegen, und auch selbst die Entfernungen der vornehmsten Objekte einer Landschaft z. B. Dörfer, Städte, Bergspitzen, u. s. w. oft sehr groß sind, so würde man sich vergeblich des Meßtisches zu deren Entwerfung bedienen, weil, wenn diese Objekte auf den Meßtisch kommen solten, man den verjüngten Maaßstab gar zu klein annehmen müste, und dieses, nebst vielen andern Ursachen, keine große Genauigkeit verstatten würde. Ich will also in nachstehender Aufgabe noch die nöthigen Bemerkungen beyfügen, die dem Gebrauche des Astrolabii eigen sind.

Aufgabe.

§. 239. Die Aufgabe des 231 §es vermittelst des Astrolabii auflösen.

Aufl. Man verfährt mit mehreren Objekten A, B, C, D, E Fig. LXXX auf eine ähnliche Art, wie in §. 184 mit zweyen Objekten verfahren worden ist.

Wenn nemlich F, G, die Standpunkte sind, mithin FG die Standlinie bezeichnet, aus der die Objekte A, B, u. s. w. entworfen werden sollen, so bringe man das Astrolabium erstlich über G, stelle es horizontal, und den Index des Vernier

auf o°. Wende demnächst das ganze Werkzeug bis das auf o° gestellte Fernrohr, genau nach dem Standpunkte F hingerichtet ist.

In dieser Lage befestige man das Werkzeug, lasse es unverrückt, und fange nun an, durch bloße Umdrehung der Alhidadenregel das Fernrohr nach der Ordnung, nach den Objekten A, E, D, C, B zu richten.

Man bemerke bey jeder Richtung des Fernrohres die Anzahl von Graden und Minuten, die der Inder auf dem Rande weiset, und schreibe sowohl den Nahmen der Objekte, als auch die Anzahl von Graden u. s. w. auf, welche man bey jeder Richtung des Fernrohres gefunden hat völlig so wie (§. 132) gezeigt worden ist.

Man zeichne übrigens auch die Nahmen der beyden Stationen G, F auf, und bemerke in dem Diario, daß der Inder des Vernier, bey der Richtung des Fernrohrs nach F, auf o° gestellet worden.

Es verstehet sich, daß während der ganzen Arbeit, die Ebene des Randes, in unverrückter Lage erhalten werden muß; daher man also, die Prüfungs- und Versicherungsmethoden des 131 Jes zu beobachten hat.

An der Station F verfähret man nun auf dieselbe Art, wie bey der Station G verfahren worden. Man stellet das Werkzeug wieder so, daß das nach G gerichtete Fernrohr abermahls o° weiset. — Visiret nun nach D, C, B, A, E, und schreibt in dem Diario neben die Nahmen dieser Objekte, die jedem Objekte entsprechende Anzahl von Graden und Minuten;

Die Standlinie FG, kan nun entweder unmittelbar, oder aus einer anderen Standlinie (§. 184) bestimt seyn.

Um das bisher beygebrachte, und das folgende desto besser zu übersehen, so will ich setzen, in das Verzeichnis seyen die Winkel auf folgende Art eingetragen worden

Station G		Station F	
Gegenstände	der Inder weiset	Gegenstände	der Inder weiset
F	0°. 0′	G	0°. 0′
A	24. 18	D	38. 21
E	138. 18	C	63. 2
D	251. 40	B	104. 4
C	288. 56	A	238. 10
B	325. 28	E	342. 25

In diesem Verzeichnisse, folgen die Gegenstände nebst dem zugehörigen Stand des Inder, in der Ordnung auf einander, wie sie nach und

nach, bey Umdrehung der Alhidadenregel, in das Fernrohr kommen. Es ist dabey zum voraus gesetzt, daß nach der Einrichtung des §. 99 beschriebenen Winkelmessers, die Gradabtheilungen, von der linken Hand gegen die rechte gezählet werden, und daß an jeder Station die Alhidadenregel, so gedrehet wird, daß der Index sich auf dem Rande, nach der Ordnung der Grade fortbeweget.

Wenn also z. E. bey G, das nach F gerichtete Fernrohr Φf, bey Φ auf 0° stehet, so werden die Grade auf dem Rande, nach der Richtung $\Phi dcbfac\Phi$ gezählet, und wenn folglich das Fernrohr Φf nach dieser Richtung gedrehet wird, so werden die Gegenstände, nach folgender Ordnung F, A, E, D, C, B, in dasselbe kommen, und der Index wird bey jeder Richtung des Fernrohrs, die in dem Verzeichnisse angegebenen Grade und Min. weisen.

Auf eben die Art verhält sich die Sache bey der Station F, wo das nach G gerichtete Fernrohr γg, nach der Richtung $\gamma aedcb\gamma$ gedrehet wird.

Zus. I. Hieraus wird also erhellen, wie man aus denen in dem Verzeichnisse angegebenen Daten, die spitzen oder stumpfen Winkel finden könne, die in den Dreyecken FGD, FCG u. s. w. sich an der Standlinie FG befinden.

Er-

Ex. Für das Objekt D zeigt der Inder
an der Station G ; 251°. 40′
an der Station F ; 38°. 21′.

Dies heist soviel: Anfangs bey des Fernrohrs Of Richtung nach F stand der Inder bey Φ auf 0°; nachdem nun das Fernrohr nach der Richtung Φcbad herumgedrehet worden, und die Richtung dd nach dem Objekte D erhalten hat, so hat der Inder des Vernier auf dem Rande, den Bogen Φcbfad = 251°. 40′ durchlaufen. Also ist 360° — 251°. 40′ = dem Bogen dcΦ = dem Maaße des Winkels dGΦ oder FGD. Also FGD = 108°. 20′

Auf eben die Art stand an der Station F der Inder bey γ auf 0°, das Fernrohr wurde nach der Richtung γagdcb gedrehet, und nachdem es aus der Richtung γg, in die Richtung δd D gebracht worden, so zeigte der Inder bey δ, den durchlaufenen Bogen γδ = 38°. 21′, = dem Maaße des Winkels γFδ = DFG.

Solchergestalt hätte man also in dem Dreyecke FGD, die Winkel DFG, DGF, an der Standlinie. Auf gleiche Weise ist bey den Dreyecken FCG, FAG u. s. w. zu verfahren.

Zus. II. Es erhellet also, daß in dem obigen Verzeichnisse der Stand des Inder nur

in dem Falle, sogleich den Winkel geben wird, den an jeder Station, ein Objekt mit der Standlinie macht, wenn der Index weniger als 180° weiset; zeigt er darüber, so muß man, um den Winkel zu erhalten, die Ergänzung zu 360° nehmen. Also wären für das Objekt E, die beyden Winkel an der Standlinie 138° 18′ und 360° — 342° . 25′ oder 17° . 35′; wo FGE = 138° 18; GFE = 17° . 35′;

Zus. III. Wenn man sich bey der Station G einen Beobachter vorstellet, der durchs Fernrohr φf nach der Station F visiret, so liegen diesem Beobachter, die Gegenstände A, E, linker Hand der Standlinie GF. Wenn nun wie bisher zum vorausgesetzt worden, das Fernrohr nach der Richtung φcbf gedrehet wird, so kommen diejenigen Gegenstände A, E, die sich linker Hand der Standlinie befinden zuerst in das Fernrohr, und für alle diese Gegenstände, zeigt der Index weniger als 180°. Für Gegenstände, die rechter Hand der Standlinie liegen wie, D, C, B; zeigt der Index über 180°.

Eben so verhält sich die Sache für einen Beobachter der am Stande F, durchs Fernrohr γg, nach G zurückvisiret. Dem liegen aber alsdann die Gegenstände D, C, B, linker Hand der Standlinie FG, und A, E rechter Hand derselben.

Zus. IV. Diese Betrachtungen Zus. III. dienen, in jedem Falle aus dem Verzeichnungsregister zu sehen, welche Objekte, in Absicht eines Beobachters, der nach der Richtung GF, oder FG sähe, linker oder rechter Hand der Standlinie FG liegen.

Ex Für den Punkt E, sind in dem Dreyecke FGE (II Zus) die beyden Winkel an der Standlinie 138° 18 und 17° . 35′ gefunden worden. Aber dieses Dreyeck liegt für einen Beobachter der bey G nach der Richtung GF visirte, linker Hand der Standlinie, weil an der Station G, in dem Verzeichnungsregister, für das Objekt E der Stand des Index = 138° 18′ ist, also weniger als 180° beträgt (III Zus.)

Zus. V. Diese Betrachtungen sind nothwendig, wenn man sich, bey Verzeichnung der Objekte, vermittelst der Dreyecke FGE, FGD u. s. w. nicht irren will, und alle Objekte A, E, D u. s w ihre richtige Lage sowohl gegen die Standlinie, als auch unter sich, erhalten sollen.

Zus VI. Nach diesen Vorbereitungen wird es nun nicht schwer seyn, vermittelst der nach (Zus II) an der Standlinie FG gefundenen Winkeln eines jeden Dreyecks, und der gemessenen Standlinie FG, diese Dreyecke FBG, FCG u. s. w. auf dem Papiere selbst, zu

ver-

verzeichnen, mithin die Objekte B, C, u. s. w. gehörig zu entwerfen.

Man kan sich, nachdem man mehr oder weniger genau verfahren will, entweder des Transporteurs bedienen, vermittelst dessen man z. E. für den Gegenstand E die Winkel GFE, FGE an die Standlinie trägt, oder, man sucht aus diesen Winkeln und der Standlinie die Seiten FE, GE, und beschreibt vermittelst ihrer das Dreyeck FGE, oder man berechnrt aus diesen Größen die Perpendicularlinien GL, EL, (§. 184 IV Aufl.) und trägt sie gehörig aufs Papier. Da ich alles hieher gehörige schon bereits im vorhergehenden bey Gelegenheit der Aufgabe (§. 184) aus einander gesetzt habe, so würde ich meinen Lesern beschwerlich fallen, alles dieses noch einmahl zu wiederhohlen. Uebrigens errinnere ich hier nur noch dieses, daß es, um der Einbildungskraft desto mehr zu Hülfe zu kommen, immer vortheilhaft ist, sich vermittelst der gefundenen Winkel an der Standlinie, nur erst einen rohen Entwurf, von der Lage der Objekte B, C, u. s. w. auf dem Papiere zu verfertigen, und sich allenfalls nur blos des gemeinen Transporteurs dazu zu bedienen. — Man wird alsdenn durch dieses Hülfsmittel einen desto deutlichern Begrif von allem erhalten, und sich selbst alsdenn bey der Berechnung der Seiten, oder Perpendicularlinien wie GL, EL, in Absicht ihrer Lage ꝛc. vieles Nachdenken ersparen

und den richtigern Entwurf demnächst mit desto leichterer Mühe verfertigen können.

XIX. Kapitel.

Noch einige Anwendungen des bisher beygebrachten, in Absicht der Methoden, deren man sich bedienen kan, perpendiculäre und parallele Linien auf dem Felde zu ziehen, gerade Linien abzustecken, und eine Figur auf dem Meßtische auf das Feld abzutragen u. s. w.

Aufgabe.

§. 240. Durch einen gegebenen Punkt C Fig. XXXV; mit einer vorgegebenen Linie AB eine parallele zu ziehen.

Aufl. I Fall. Wenn man von C nach zween Punkten A, B dieser Linie hinmessen kan.

Man messe CA, CB, bringe den Meßtisch über C, ziehe die Richtungen cm, cn, nach A und B, und nehme auf denselben Ca, Cb, denen CA, CB gemäß, so wird ab auf dem Meßtische mit AB parallel seyn; man ziehe mit ab, durch c

eine

eine parallele, (§. 64) lege an dieselbe die dioptrische Regel, so wird man in der Richtung der Dioptern, Stäbe, mithin eine gerade Linie oder Verticalebene abstecken lassen können, welche mit der AB parallel seyn wird.

II Fall. Durch D Fig. XL eine parallele mit AB zu ziehen, wenn man von D, nirgends nach AB hinkommen kan.

Man nehme eine willkürliche Standlinie CD an, und verfahre nach §. 184, als wenn man die unzugängliche Weite AB finden wolte.

Weil nun am Ende der Operation, die Weite ab auf dem Meßtische, der AB nicht allein gemäß, sondern auch parallel wird (§. 184 Zus.), so ziehe man demnächst bey unverrücktem Stand des Meßtisches, durch den lothrecht über D liegenden Punkt d, eine parallele mit ab, lege an dieselbe das Diopterlinial, und lasse in der Richtung der Dioptern, Stäbe abstecken, so wird eine gerade Linie durch sie, mit AB gleichlaufend seyn.

Zus. I. Es erhellet, daß vermöge der Aufgaben des XV Kapitels die Ziehung der Parallellinien auf dem Felde noch auf unterschiedene andere Arten bewerkstelliget werden kan. — Ich will aber diese Untersuchungen meinen Lesern selbst überlassen. Man kan sich auch oft der Magnetnadel mit Vortheil zu dieser Absicht bedienen.

Zus.

Zus. II. Wenn man auf ab Fig. XL eine Perpendiculärlinie fällt, und hierauf an diese Perpendiculäre das Dioptrlinial legt, so kan man in der Richtung dieser Dioptern Stäbe aussetzen lassen, die in einer geraden Linie liegen werden, welche auch auf AB senkrecht stehet: So kan man also auf eine Linie AB auf dem Felde eine Perpendiculärlinie ziehen, wenn man gleich nicht an diese Linie kommen kan.

Es erhellet, daß man auf AB eine Linie setzen könne, die jeden willkürlichen Winkel mit AB macht, wenn man nur diesen Winkel an ab auf den Meßtisch trägt, und wie beym rechten Winkel verfährt.

Es verstehet sich, daß während der ganzen Arbeit der Meßtisch in unverrückter Lage erhalten werden müsse, damit ab nicht aus der mit AB parallelen Lage komme.

Zus. III. An eine Linie CD an die man kommen kan, einen beliebigen Winkel CDB zu setzen, so verzeichne man diesen Winkel auf dem Meßtische, so daß cdb = CDB. Bringe d lothrecht über D, und die Richtung dc längst DC, so kan man längst des an db gelegten Dioptrlinials hinaus visiren, und in die Richtung db Stäbe absetzen lassen; mithin die gerade Linie DB bestimmen, die mit CD den gegebe-

nen Winkel CDB macht. Dies Verfahren heist, einen Winkel auf dem Felde abzustecken, und wird bey Theilung der Felder gebraucht.

§. 241. Aufg. Zwischen A und E Fig. LXXXI Stäbe in eine gerade Linie abzustecken, wenn man gleich von A nicht nach E hinsehen kan, und sich auch zwischen A und E keine Punkte annehmen lassen von denen man A oder E sehen könte, wie wenn z. E. zwischen A und E sich ein Wald befände.

Aufl. Wenn man von A gleich nicht in gerader Richtung nach E kommen kan, so wird man doch durch Umwege, wie durch ABCDE vorgestellet ist, nach E kommen können. ABCDE könte z. B. einen Weg bedeuten der von A nach E durch den Wald gienge.

Da man solchergestalt sich eine Figur ABCDE gedenken kan, von der die gerade Linie AE eine Seite ist, und da man diese Figur, von A nach E, nach der Richtung ABCDE umgehen kan, so bediene man sich der Aufgabe des 222 §, und bringe diese Figur ABCDE zu Papiere, dergestalt daß die Punkte a, b, c, d, e auf dem Meßtische die Stationen A, B, C, D, E, vorstellen; da man nun, ohne längst AE würklich visiret zu haben, demohnerachtet, die Länge und Lage dieser Linie auf dem Meßtische erhält, indem

dem man die Punkte A, B, C, D, E, durch a, b, c, d, e, auf dem Papiere entworfen hat, und auf dem Meßtische durch die beyden Punkte a, e, eine gerade Linie ziehet, so erhellet, weil der solchergestalt erhaltene Winkel bae dem BAE gleich ist, daß man nur nöthig habe, den Meßtisch mit der darauf befindlichen Figur abcde über A zu bringen, den Punkt a über A, und die Linie ab längst AB einzurichten; dann wird das auf dem Meßtische längst ae angelegte Diopterlinial die Richtung AE bestimmen, nach der man durch den Wald Stäbe n, m abstecken lassen muß, um von A nach E in gerader Linie hinzukommen.

Es ist klar, daß man, um die gerade Linie durch den Wald verlängern zu können, diejenigen Bäume, oder Büsche, auf die die Richtung der Dioptern trift, niederhauen, oder umbiegen müsse. Und wenn nur erst ein paar Stäbe m, n, in die Richtung der Dioptern abgesteckt worden sind, so wird man demnächst die Dioptern nicht mehr nöthig haben, sondern die gerade Richtung Anm, bloß wie gewöhnlich verlängern können (§. 32).

So wird z. E. diese Aufgabe gebraucht, wenn von einem Orte A nach einem andern E, eine Allee oder eine Strasse durch den Wald gehauen werden solte.

Man siehet aber leicht, daß diese Aufgabe in allen den Fällen gebraucht werden kan, wo von einem Orte nach einem andern eine gerade Linie abgesteckt werden soll, die man auf keinerley Weise nach den gewöhnlichen Arten §. 32 abstecken kan.

Uebrigens ist klar, daß je weniger Umwege man nöthig hat, von A nach E zu kommen, desto richtiger die Arbeit ausfallen werde. Weil man alsdenn, bey Entwerfung des Umweges ABCDE, nicht so viel Winkel und Seiten auf den Meßtisch zu bringen hat, und sich folglich desto wenigern Fehlern aussetzet.

Verschiedene Schriftsteller bedienen sich bey dieser Aufgabe auch der Boussole. — Man erhält aber dadurch nicht die nöthige Genauigkeit; (m. s. hievon Hrn. Geh. R. Böhms Meßkunst auf dem Felde §. 47).

§. 242. Aufg. Eine auf dem Meßtische gezeichnete Figur auf dem Felde abzustecken.

Aufl. I. Es sey Fig. LXXII. abcde die Figur auf dem Meßtische, die aufs Feld abgetragen werden soll. Man bringe den Meßtisch über die ebene Fläche, auf die man die Figur abstecken will, und nehme innerhalb abcde, einen Punkt o an; an diesen Punkt o lege man die

die dioptrische Regel und lasse in den Richtungen oe, od, oc, ob, oa, Stäbe abstecken, die man, um sich demnächst nicht zu irren, mit eben den Nummern bezeichnet, womit man die Eckpunkte e, d, c, b, a bezeichnet haben muß.

Hierauf messe man nach dem verjüngten Maaßstabe, womit man die Figur abcde, aufgetragen hat, die Weiten oe, od, oc, ob, oa, und trage sie nach der Meßkette, nemlich oe, von o nach E, od, von o nach D, u. s. w. in die abgesteckten Richtungen; so wird die Figur EDCBA auf dem Felde, der auf dem Meßtische ähnlich werden.

Aufl. II. Es sey Fig. LXXV abcdef die Figur auf dem Meßtische, die man auf dem Felde so abstecken soll, daß die Seite af, an die vorgegebene Linie AF zu liegen komme.

Man richte die Linie af längst AF ein; und lasse, indem man an ab, ac, ad, ae, das Diopterlinial legt, in diesen Richtungen wieder Stäbe abstecken, und mache AB, AC, AD, AE, AF nach der Meßkette so groß, als ab, ac, ad, ae, af, nach dem verjüngten Maaße sind, so wird die Figur ABCDEF der abcdef ähnlich werden.

Aufl. III. Man siehet leicht, daß man, indem man die Aufgabe des 222 §es umkehret, auch eine Figur auf dem Meßtische, aus ihrem Umkreise abstecken kan; da aber sowohl diese Aufgabe, als wie überhaupt das Abstecken der Figuren nach andern Methoden, die sich gar leicht erdenken liessen, eben keine sonderliche Schwürigkeit hat, wenn man nur die im XVIII Kapitel beygebrachten Vermessungsarten wohl inne hat, so werde ich mich dabey nicht länger aufhalten, und nur noch die Errinnerung beyfügen, daß dieses Abstecken der Figuren vorzüglich bey Feldertheilungen gebraucht wird. Bey welchem Geschäfte ein Feldmesser aber alle nöthige Sorgfalt und Vorsicht anwenden muß, die Theilungslinien und Winkel auf dem Meßtische, mit der möglichsten Schärfe abzustecken.

§. 243. Aufg. Es sey Fig. XL, AB eine Weite von bekanter Grösse, und CD eine Weite die man finden soll; zwischen C und D ist ein Hinderniß, daß man von D nach C zwar nicht messen, aber doch hinsehen kan; an die bekante Länge AB kan man gar nicht kommen; man soll CD finden, vorausgesezt daß man nur über C, D den Meßtisch bringen kan.

Aufl. Man verfahre wie in (§. 184,) als wenn man aus der Standlinie CD, die Weite

AB

AB finden wolte. Da aber CD nicht gemessen werden kan, so mache man cd auf dem Meßtische von willkürlicher Länge z. E. nehme cd tausend Theilen eines gewissen Maaßstabes gleich; nachdem nun der Meßtisch wie gehörig über D gebracht worden, und man auf demselben nach (§. 184) alle Richtungslinien gezogen hat, so wird die Figur abcd, der ABCD ähnlich, und es sind ab, cd, denen Linien AB, CD proportional; man messe also auf dem Meßtische die Linie ab, nach dem Maaßstabe, nach welchem man hier z. E cd = 1000 Theilen genommen hat; ich will setzen man fände nach diesem Maaßstabe ab = 3560 Theilen; wenn nun die bekante Weite AB = 670 Ruthen wäre, so fände man CD nach der Proportion ab : cd = AB : CD oder

3560 : 1000 = 670 : CD

also CD = 188,2 Ruth.

Diese und ähnliche Aufgaben können beym Feldmessen unterweilen mit Nutzen gebraucht werden.

Wenn man auf dem Meßtische die Weiten ac, cb, u. s. w. nach dem erwähnten tausentheiligten Maaßstabe misset so findet man aus den Proportionen

ab : AB = ac : AC; ab : AB = cb : CB u. s. w.

auch die Entfernungen wie AC, CB; oder AD, BD;

Ende des zweiten Theils.

Noch einige Druckfehler im ersten Theile.

Seite 9 Zeile 7 statt sin ψ lieſs sin φ
S. 12 Z. 10 statt AC : DC l. AD : AC
S. 13 Z. 8 am Ende dieser Zeile statt φ l. ψ
S. 20 Z. 11 statt — DC^2 l. $\pm$ AC^2
S. 147 Z. 20 statt 1140 l. 1040
S. 148 Z. 2 und 4 statt 1440 l. 1040
S. 183 Z. 2 vom Ende, statt also l. also in
S. 195 Z. 1 statt gut l. gut seyn
S. 239 auf der letzten Z. statt $\frac{m}{m+n}$ l. $\frac{n}{m+n}$
S. 240 lese man in dem dortigen Exemp. überall
$\frac{3}{4}$; $\frac{3}{32}$ statt $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{32}$
S. 241 Z. 12 statt $\frac{m}{m+n}$ l. $\frac{n}{m+n}$
S. 258 letzte Z. statt CL l. CK
S. 350 Z. 4 statt deswegen l. der wegen
S. 449 Z. 5. statt $\frac{22}{30}$ l. $7\frac{22}{30}$

Druckfehler im zweiten Theile.

S. 15 Zeile 2 vom Ende, statt für α 3 l. Wenn $\alpha = 3$
S. 79 Z. 2 statt 12° l. tang 12°
S. 89 Z. 23 statt Zinkelgewinde l. Zirkelgewinde
S. 164 Z. 5 statt Mesnico l. Menisco
S. 223 letzte Z. statt BA l. BC
S. 230 Z. 10 statt log tang φ l. tang φ
S. 231 Z. 3 statt tang ACB l. tang $\frac{1}{2}$ ACB
S. 250. Z. 16 statt DC l. ADC
S. 430 Z. 10 statt derjenigen l. denjenigen.

Fig. I.

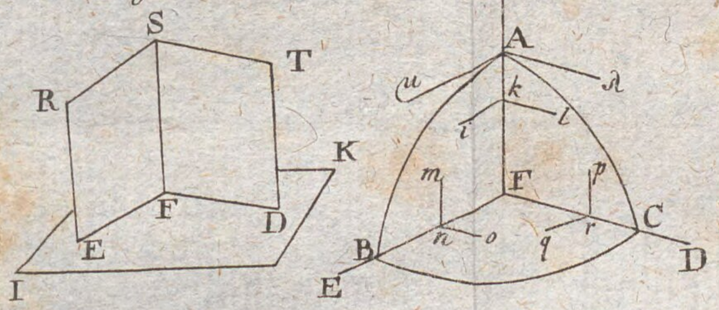


Fig. II.

Fig. III

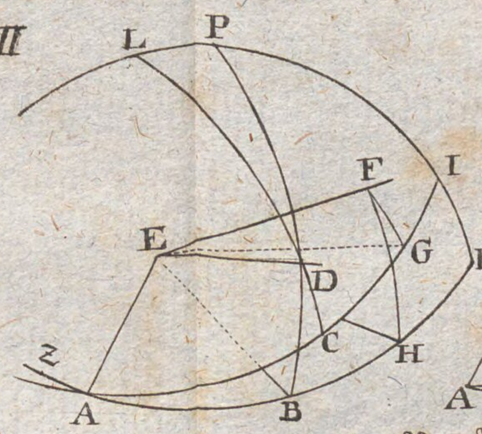


Fig. IV.

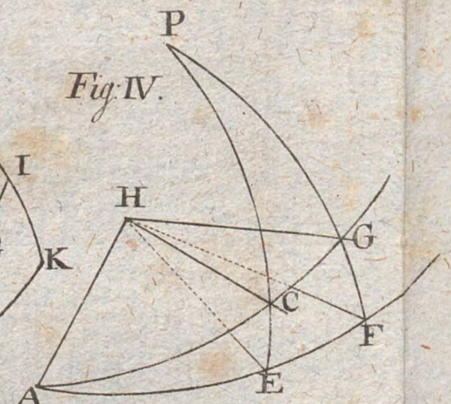


Fig. V.

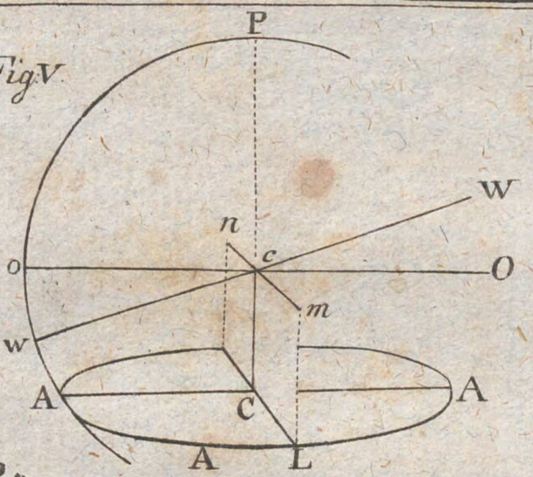


Fig. VI.

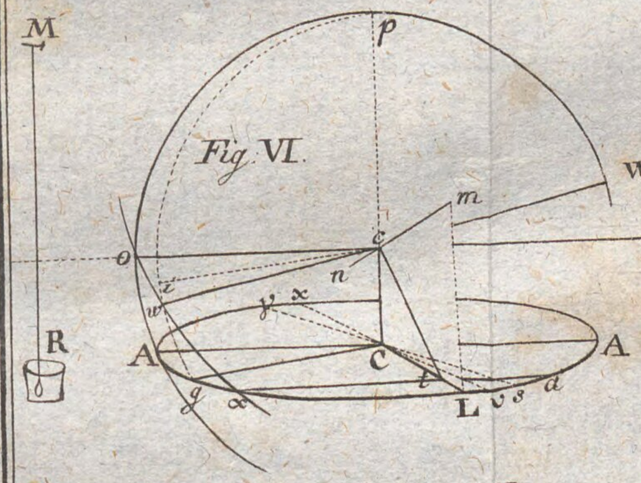
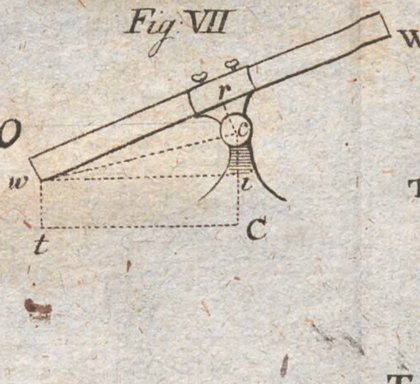


Fig. VII



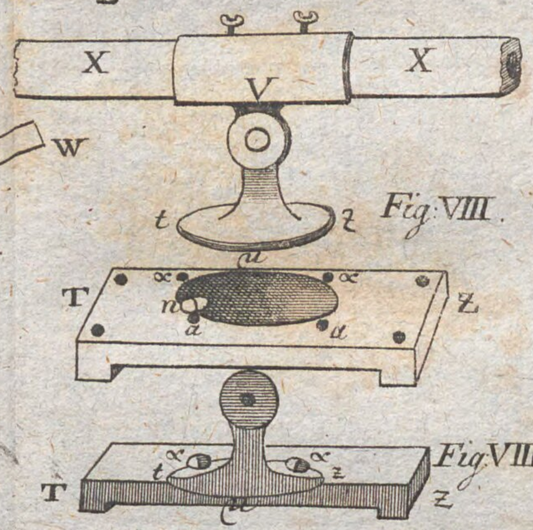


Fig. IX.

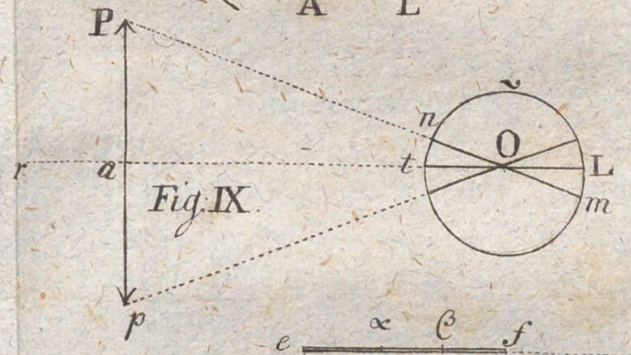


Fig. XIII.

Fig. X.

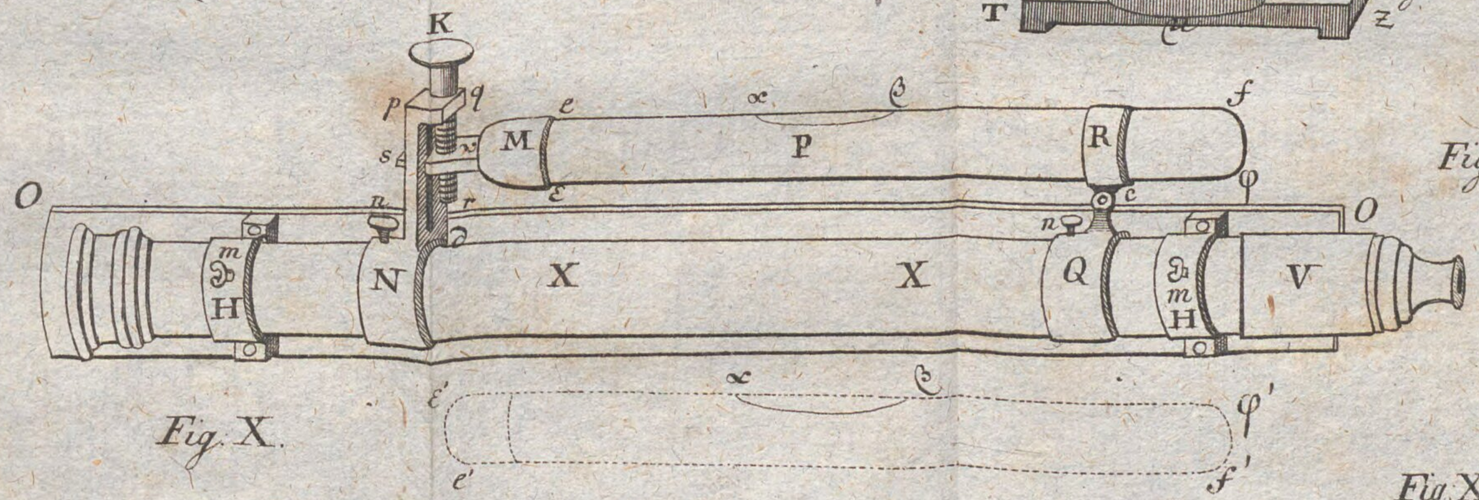


Fig. XI.

Fig. XII.

Fig. XIV

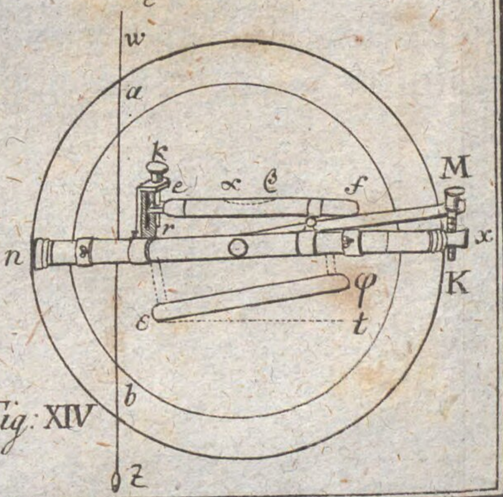


Fig. XV

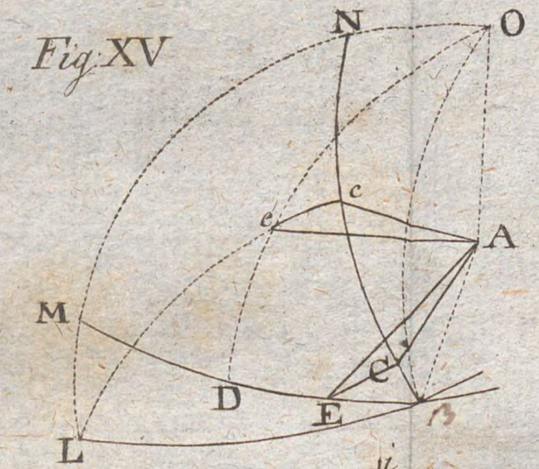


Fig. XVI

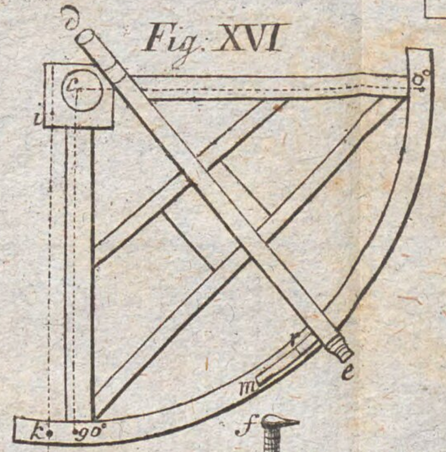


Fig. XVII

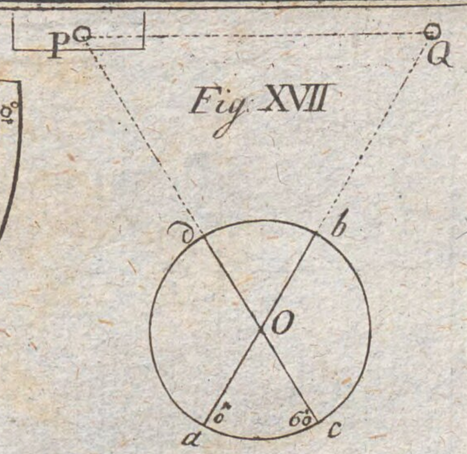


Fig. XVIII

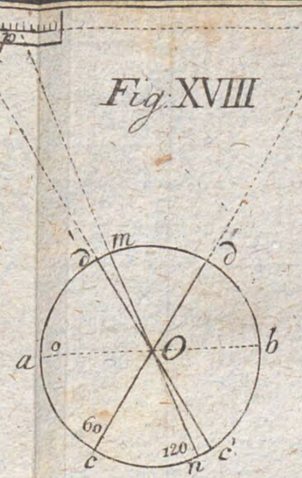


Fig. XIX

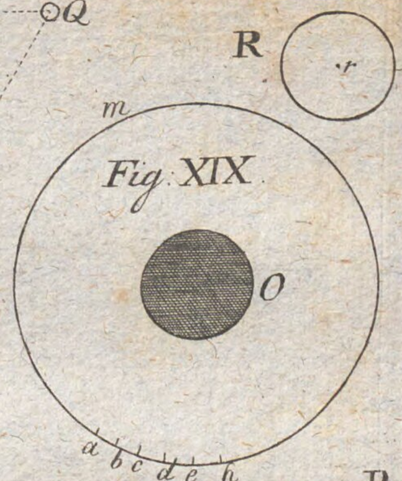


Fig. XX.

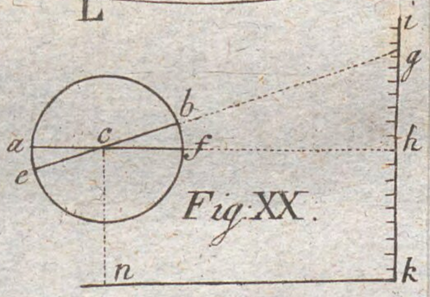


Fig. XXI

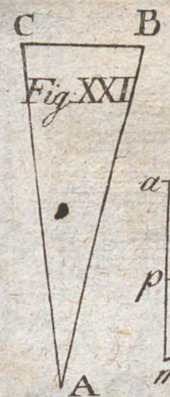


Fig. XXII.

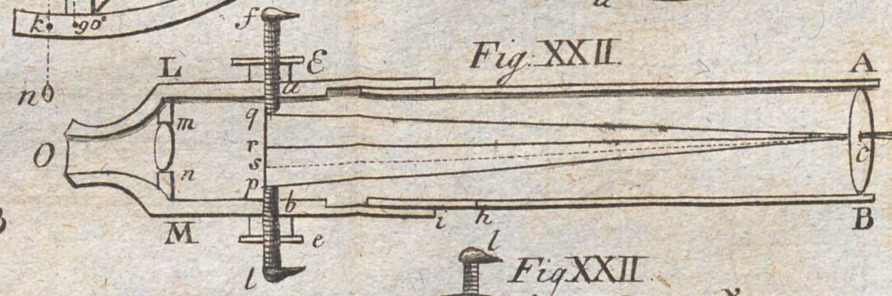


Fig. XXIII

Fig. XXIV.

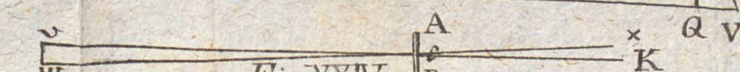


Fig. XXV.

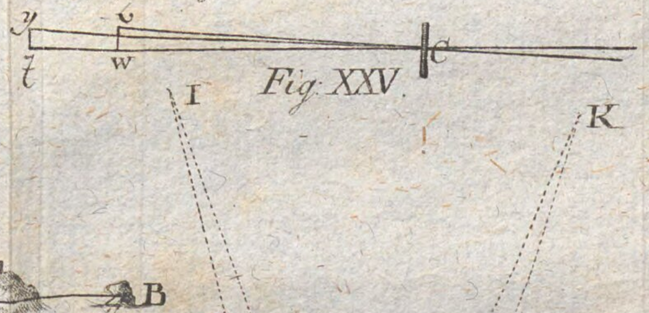


Fig. XXVI

Fig. XXVII.

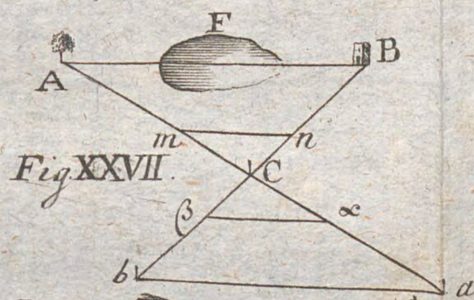


Fig. XXVIII

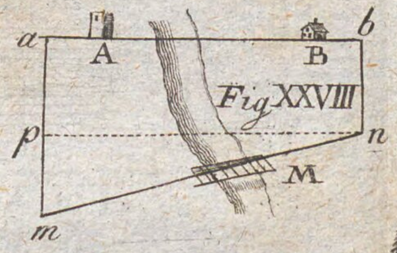


Fig. XXIX

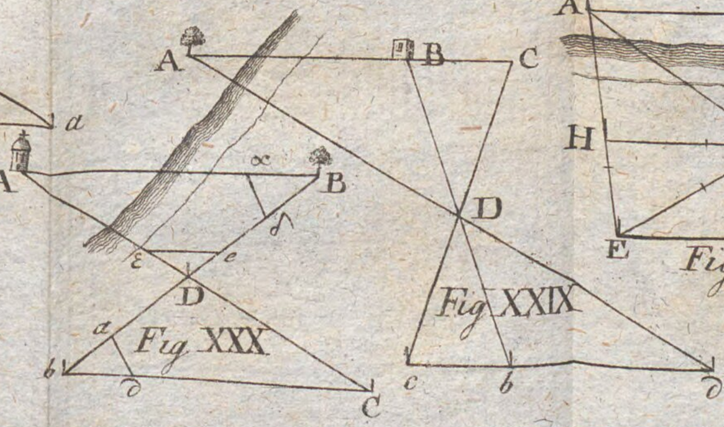


Fig. XXX

Fig. XXXI

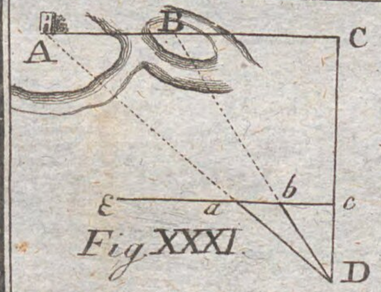


Fig. XXXII.

Fig. XXXIII

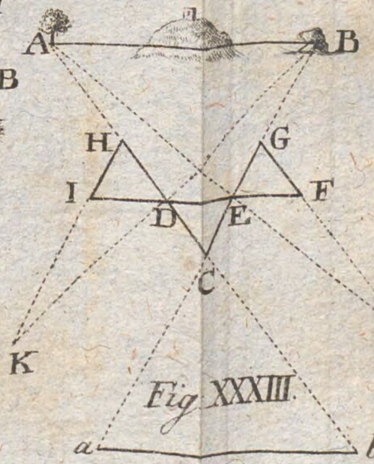


Fig. XXXIV.

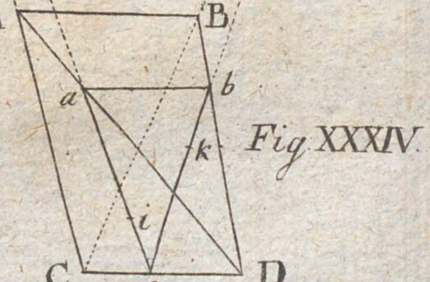


Fig. XXXV.

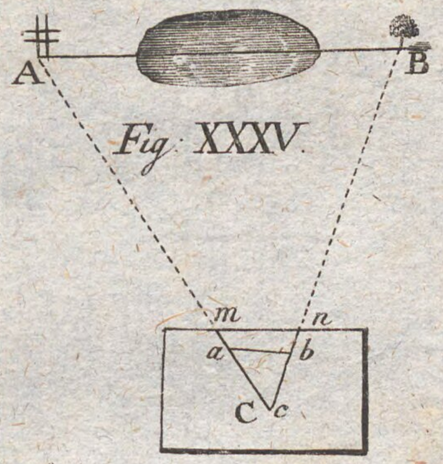


Fig. XXXVI.

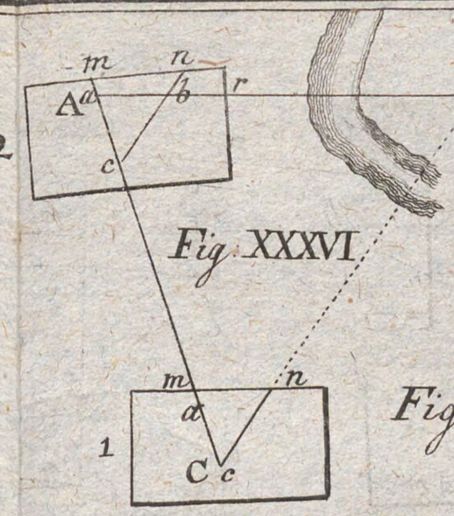


Fig. XXXVII.

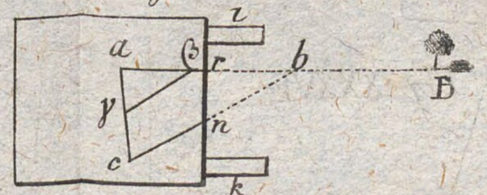


Fig. XXXVIII.

Fig. XXXIX.

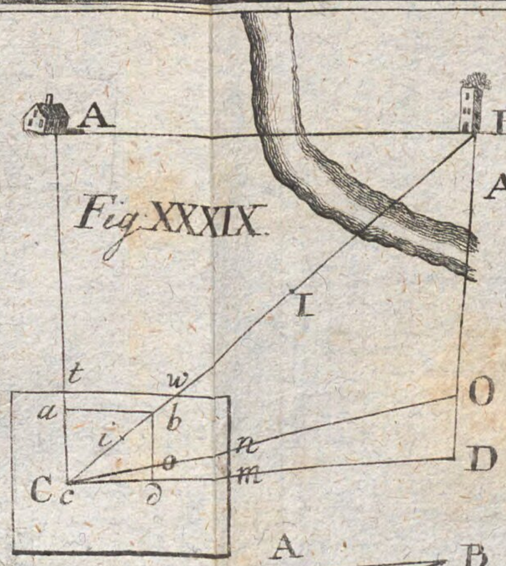


Fig. XLIV.

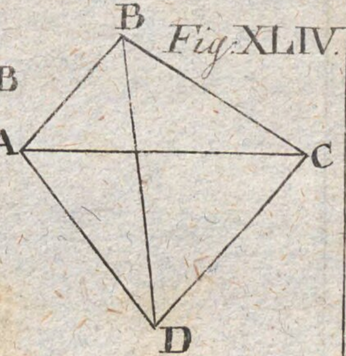


Fig. XLIV.

Fig. XL.

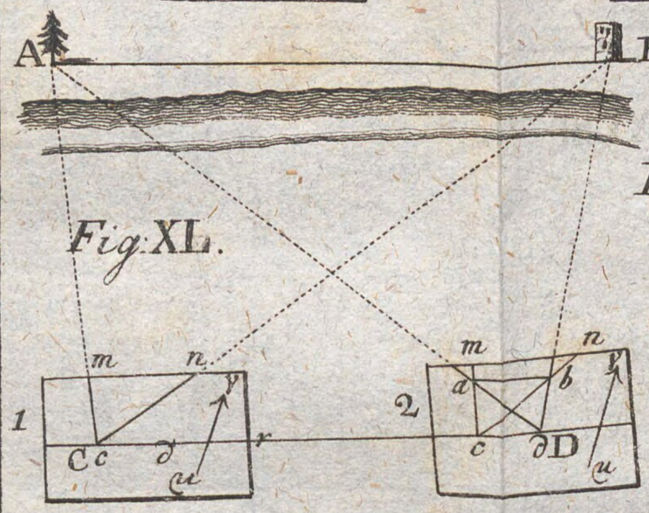


Fig. XLI.

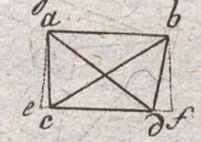


Fig. XLII.

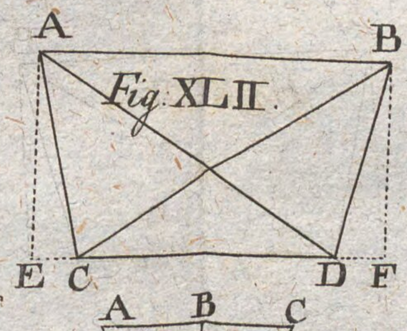


Fig. XLIII.

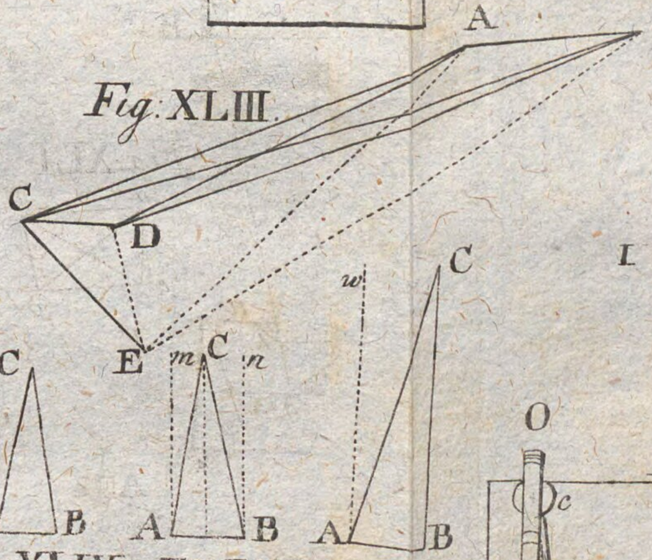


Fig. XLVI.

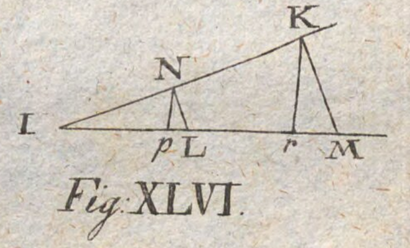


Fig. XLVIII.

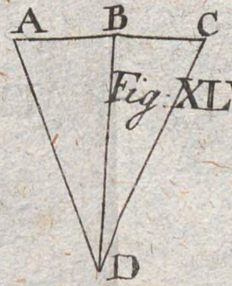


Fig. XLIX

Fig. L

Fig. LI.

Fig. LII.

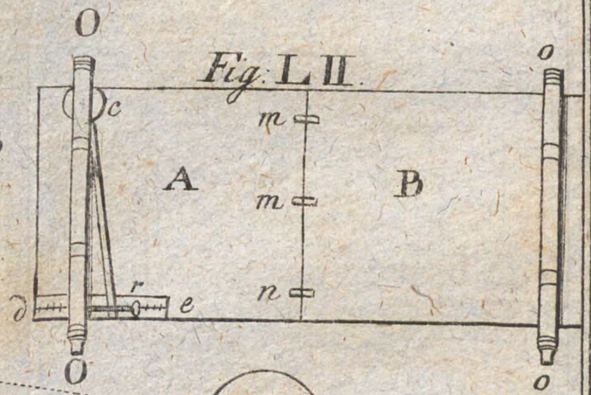
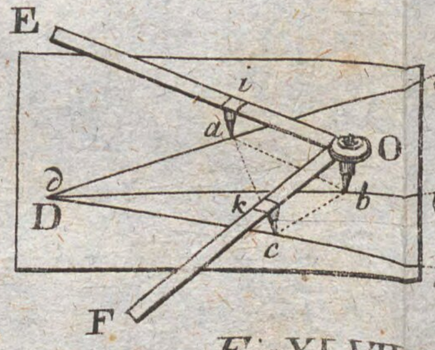


Fig. XLVII



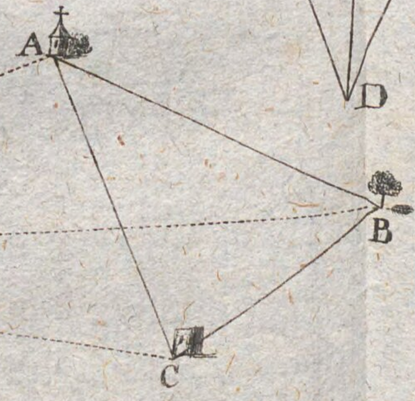
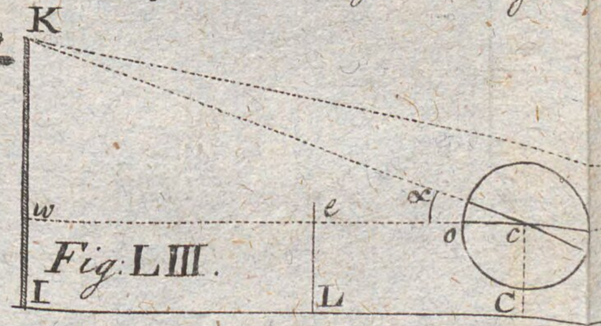


Fig. LIII.



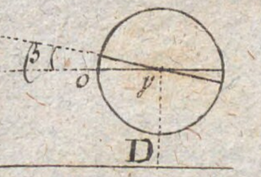


Fig. LIV

Fig. LV.

Fig. LVI

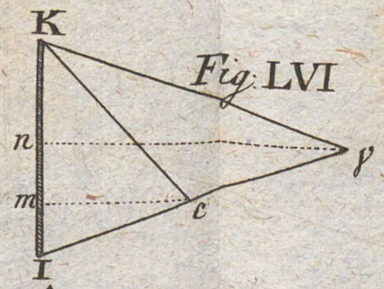


Fig. LVII.

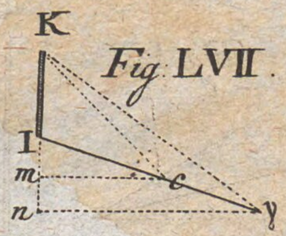


Fig. LVIII.

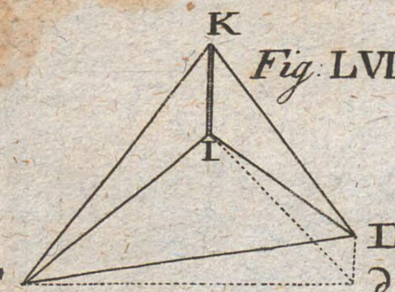


Fig. LIX

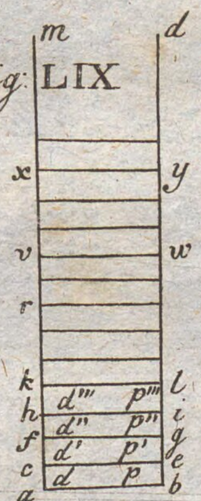


Fig. LX

Fig. LXI

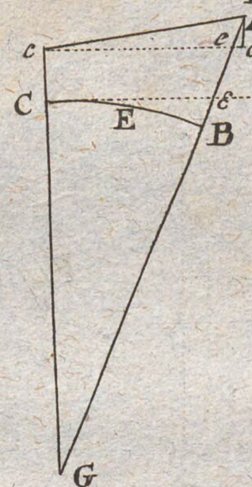


Fig. LXII

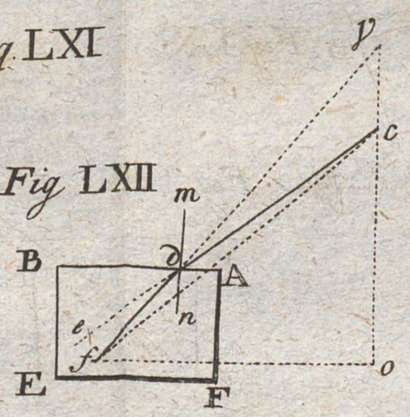


Fig. LXIII.

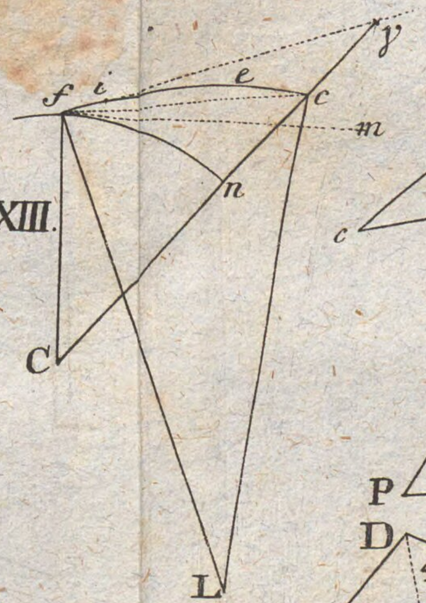


Fig. LXIV.

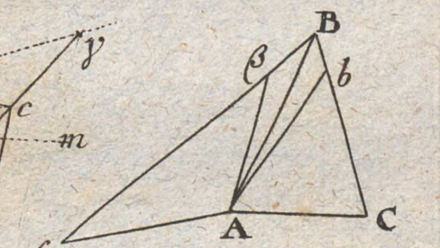


Fig. LXV.

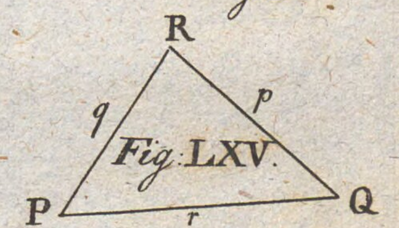


Fig. LXVI

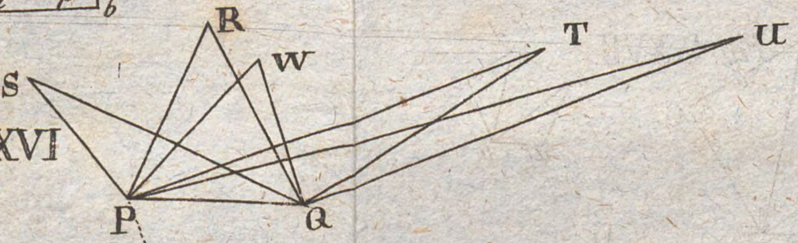


Fig. LXVII

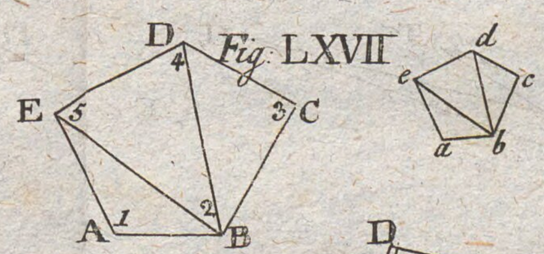


Fig. LXVIII

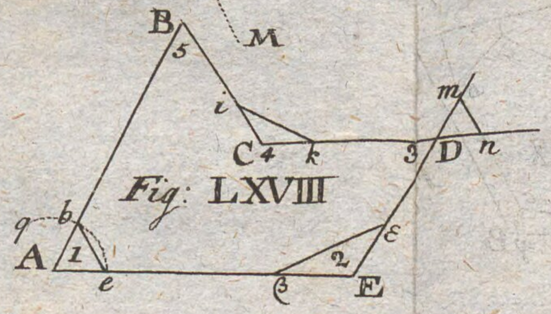


Fig. LXIX

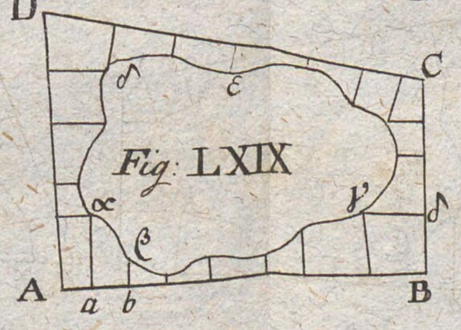


Fig. LXX

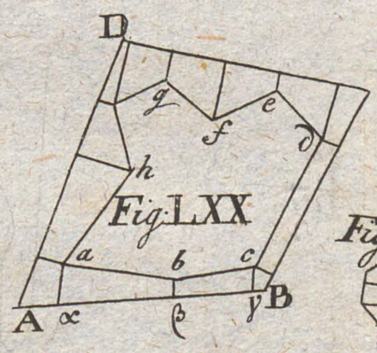
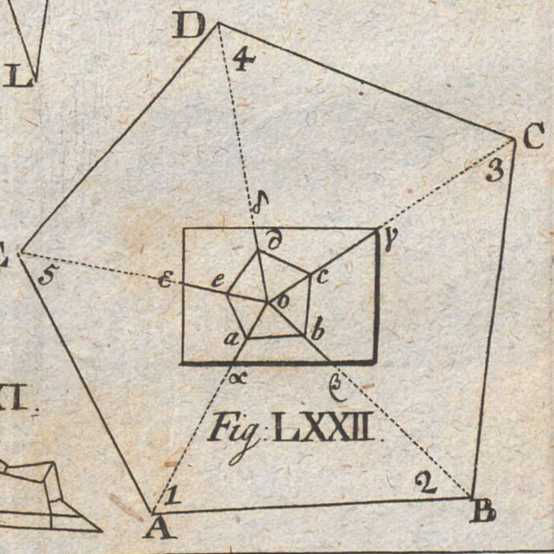


Fig. LXXI.

Fig. LXXII.



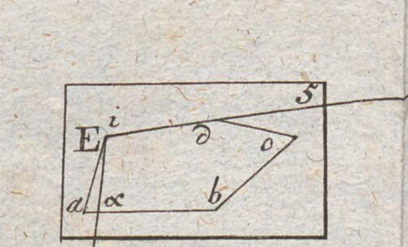


Fig. LXXIII

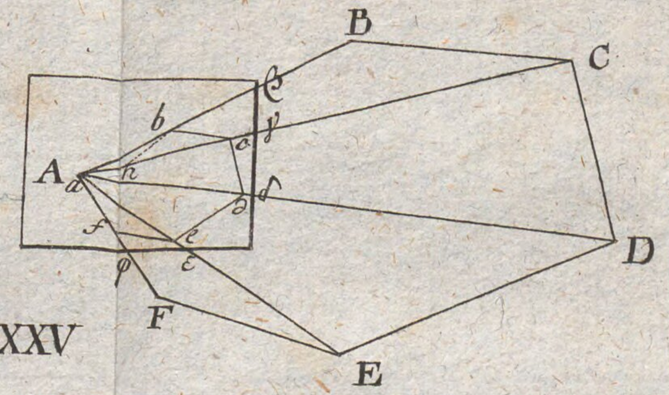


Fig. LXXV

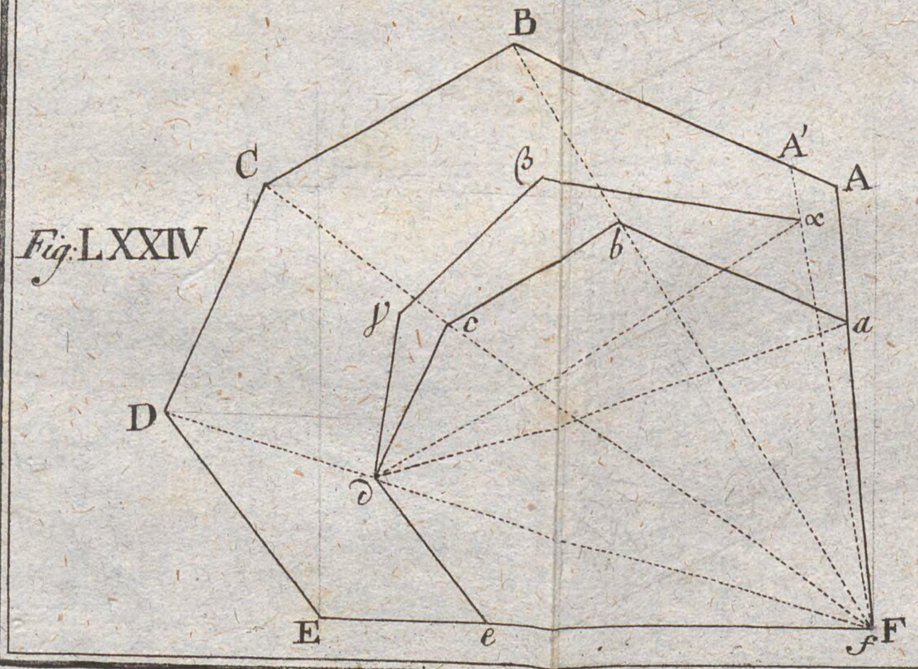


Fig. LXXIV

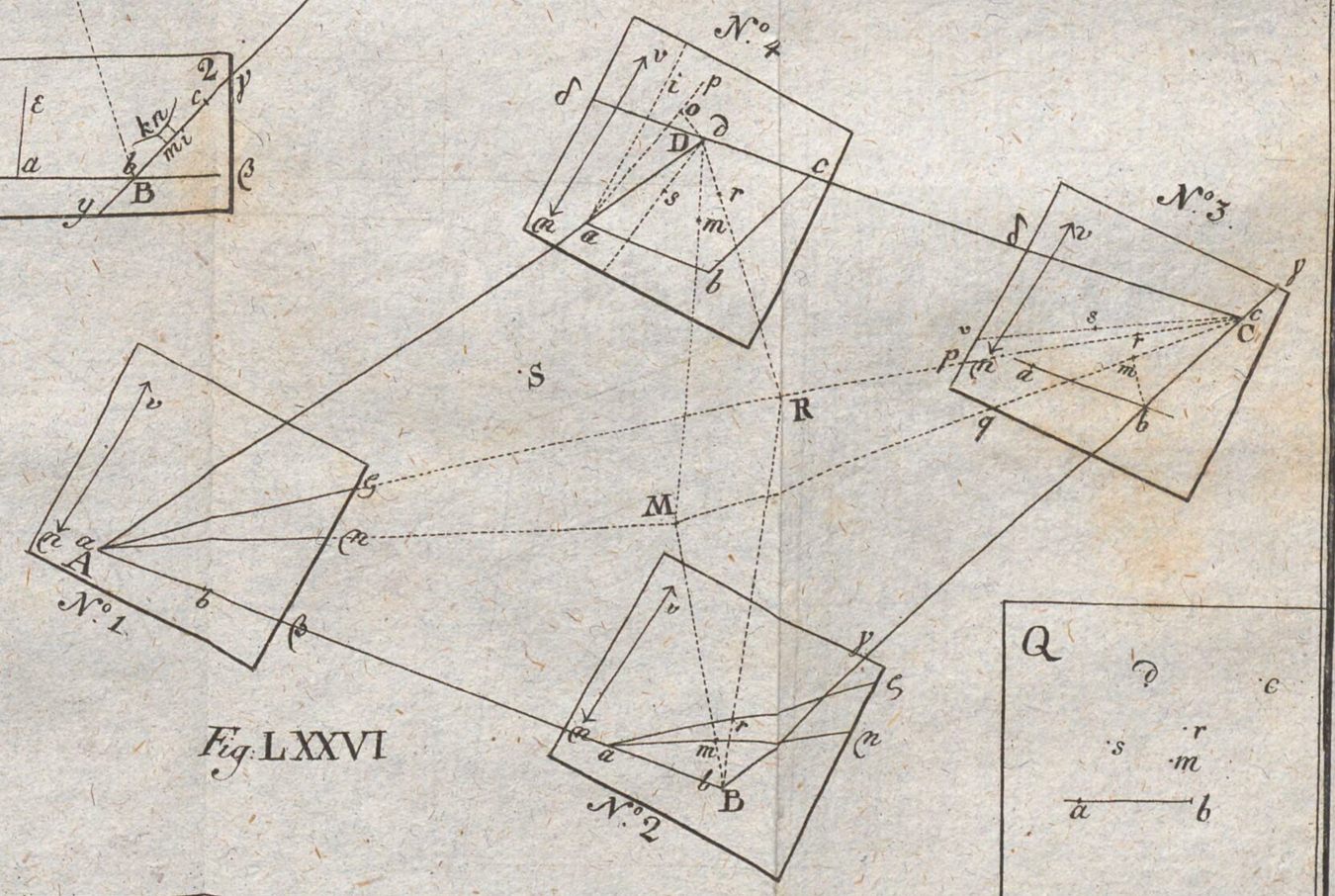


Fig. LXXVI

Fig. LXXVII

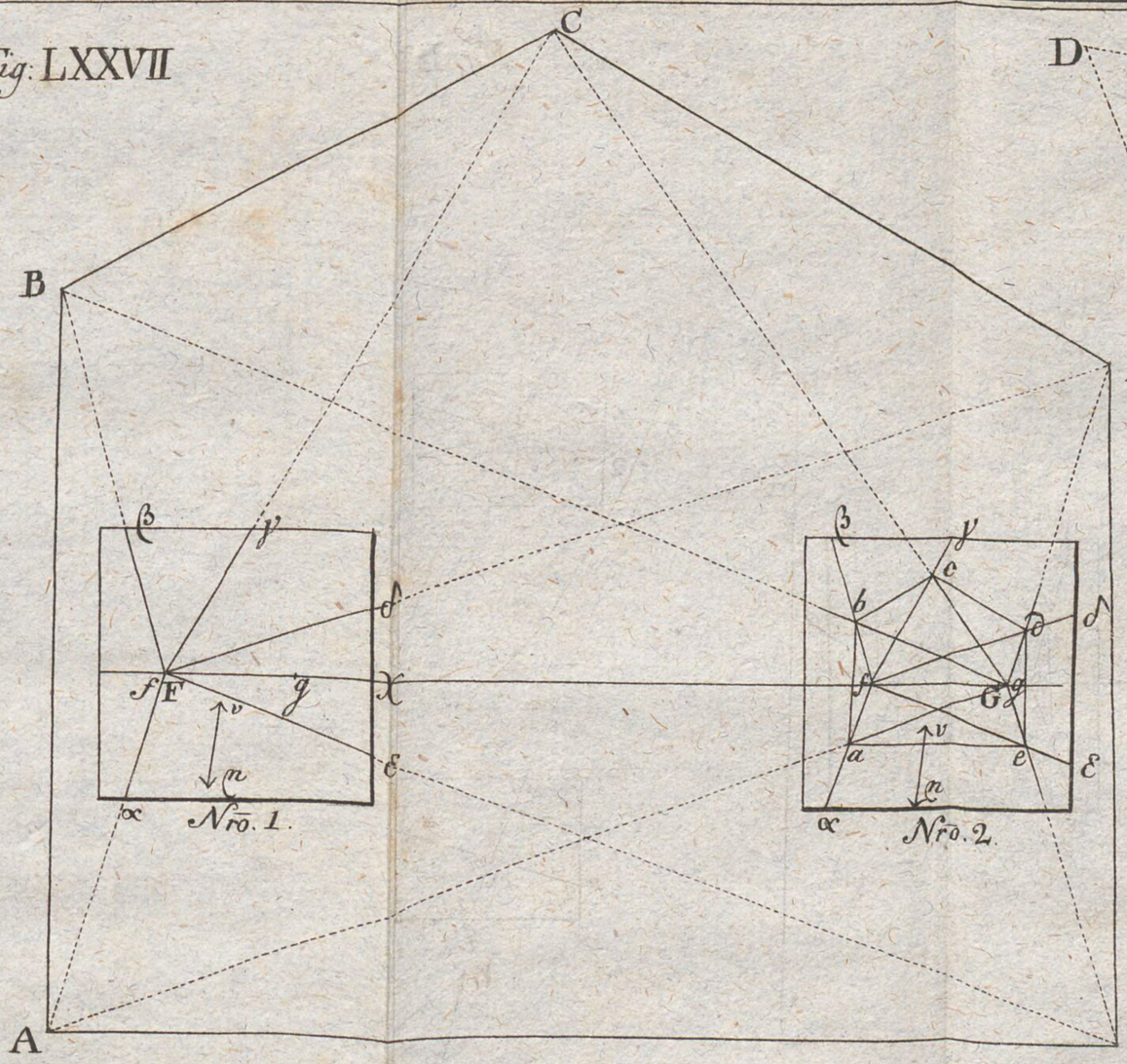


Fig. LXXIX

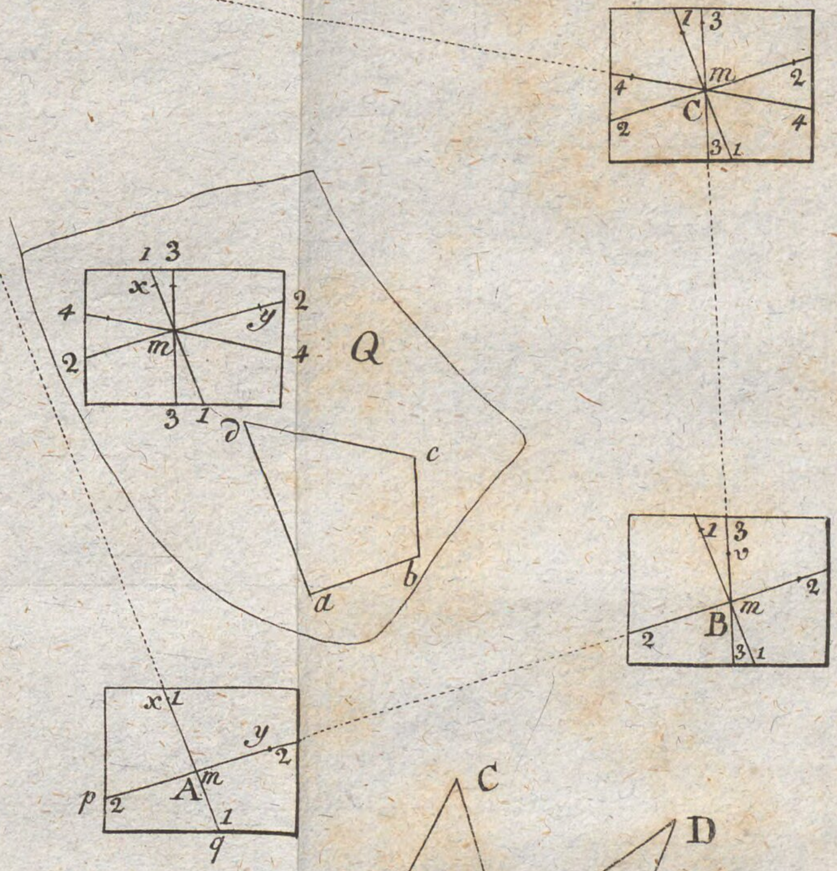


Fig LXXVIII

Fig. LXXXI

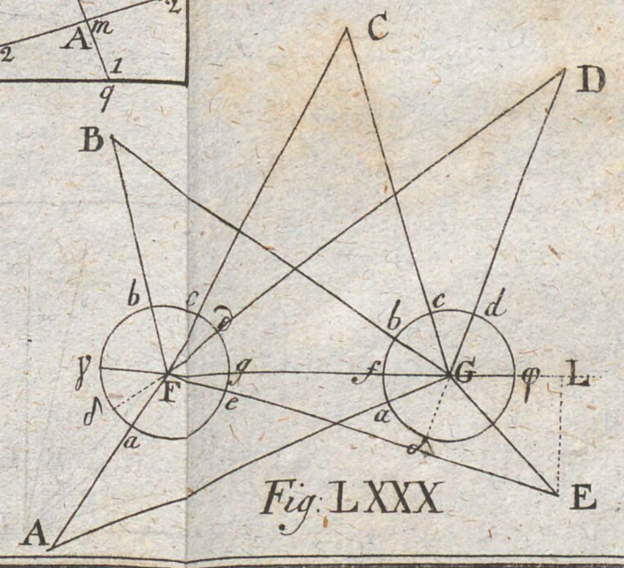


Fig. LXXX

6.4.c

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Mayer, Johann Tobias,

Gründlicher und ausführlicher Unterricht zur praktischen Geometrie

Bd.: 2 : ... mit 6 Kupfertafeln

Göttingen 1779

Math.p. 338-2
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10082382-6
VD18 90034724